



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.005/00

**Métodos Estocásticos em Turbulência Desenvolvida**

João Paulo Viegas Carneiro

Orientador

*Gerson Francisco*

Maio de 2000

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que vêm me ajudando, mesmo quando eu tenho preguiça, a me desenvolver como ser humano: Deus, todos os Profetas, todos os Santos, Omar Ali Shah e toda a sua família, minha família, meus amigos e meus inimigos. Gostaria de agradecer à FAPESP pela bolsa, processo 98/02806-0.

Agradeço particularmente ao meu orientador, prof. **Gerson Francisco**, e ao prof. **Uriel Frisch** cujas críticas e alertas me ajudaram, e ajudam, no caminho da turbulência; também a minha mãe, **Ana Maria**, pela revisão.

Dedico este estudo a **Tânia e a Sofia**, por serem as pessoas que são.

## Resumo

Nesta dissertação, utilizamos métodos da teoria de processos estocásticos para a compreensão da turbulência em fluidos. Discutimos o modelo de Kolmogorov para turbulência homogênea desenvolvida, resultados analíticos recentes para a equação de Burgers.

**Palavras-Chaves:** Turbulência; Métodos Estocásticos; Dinâmica de Fluidos

**Áreas do conhecimento:** Turbulência, Dinâmica de Fluidos, Sistemas Dinâmicos, Processos Estocásticos.

## **Abstract**

In this thesis, we use some methods of theory of stochastic process to approach turbulence in fluid dynamics. We discuss the Kolmogorov model for fully developed homogeneous turbulence, some recent analytical results to the 1-D Burgers' equation approach turbulence.

# Índice

<b>I</b>	<b>Métodos Matemáticos</b>	<b>vi</b>
<b>1</b>	<b>Sistemas Dinâmicos</b>	<b>1</b>
1.1	Conceitos Básicos . . . . .	1
1.2	Um Mecanismo Matemático para a Transição à Turbulência . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Processos Estocásticos</b>	<b>17</b>
2.1	Conceitos Básicos . . . . .	17
2.2	Cálculo Diferencial . . . . .	19
2.3	Cálculo Integral . . . . .	21
2.3.1	Integração estocástica . . . . .	22
<b>II</b>	<b>Turbulência Desenvolvida</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>Teoria de Kolmogorov</b>	<b>26</b>
3.1	Simetria e Tensores de Correlação . . . . .	27
3.2	A Relação de Kármán-Howarth . . . . .	28
3.2.1	Análise do Caso Isotrópico . . . . .	29
3.2.2	Transformada de Fourier da RKH . . . . .	31
3.3	Leis Experimentais e Escalas em Turbulência . . . . .	32
3.3.1	Escala em Turbulência . . . . .	33
3.3.2	Leis Experimentais . . . . .	35
3.4	As Hipóteses de Kolmogorov e suas implicações . . . . .	36
3.4.1	Descrição via Incrementos . . . . .	37
3.4.2	As Hipóteses de Similaridade de Kolmogorov . . . . .	38
3.4.3	As Hipóteses de Kolmogorov e a Relação de Kármán-Howarth . . . . .	39

---

3.5	Objeções à Universalidade de Kolmogorov . . . . .	40
3.6	Observações . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Formulação Funcional</b>	<b>43</b>
4.1	Funcional Característico . . . . .	43
4.2	Equação Para o Funcional Característico . . . . .	44
4.3	Solução para Número de Reynolds Nulo . . . . .	48
4.4	Abordagens Ingênuas de Solução . . . . .	50
<b>5</b>	<b>A Equação de Burgers</b>	<b>54</b>
5.1	A Equação Determinística . . . . .	54
5.2	Aproximação Heurística . . . . .	55
5.3	A Equação Estatística . . . . .	62
5.3.1	Condição Inicial Com Tempo de Pré-Choque Estatístico Positivo	63
5.3.2	Distribuição de probabilidade do gradiente da velocidade . . .	66
5.4	Observações . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>69</b>
	<b>Referências</b>	<b>70</b>

**Parte I**

**Métodos Matemáticos**

O objetivo destes dois primeiros capítulos é fornecer o embasamento matemático, por mim considerado mínimo para a leitura do corpo principal da tese (capítulos 3,4 e 5). Embora estes capítulos não sejam imprescindíveis, para uma pessoa com experiência em áreas correlatas, ajudam a tornar a tese mais autoconsistente e estabelecem os conceitos básicos que norteiam o estudo de turbulência desenvolvida na atualidade.



# Capítulo 1

## Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo trataremos de algumas definições e teoremas de sistemas dinâmicos, tendo como objetivo final justificar os capítulos posteriores, que encaram o fenômeno de turbulência desenvolvida, utilizando ferramentas de processos estocásticos.

Algumas palavras devem ser ditas sobre o que entendemos como **justificar**. Embora o estudo matemático de sistemas dinâmicos remonte ao começo do século com os trabalhos visionários de Poincaré, a aridez deste campo de pesquisa fez com que, até esta década, o foco estivesse voltado, quase que exclusivamente, ao estudo de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Como a passagem dos resultados obtidos em EDOs para EDPs permaneça ainda inacabada, este capítulo servirá somente para um entendimento qualitativo\* do comportamento das soluções.

Apesar de o nosso interesse, neste trabalho, estar voltado para sistemas descritos por equações diferenciais, existem resultados análogos para mapeamentos. As referências para este capítulo são: [14, 26, 23, 42, 45, 47, 54].

### 1.1 Conceitos Básicos

Durante quase todo o capítulo estaremos estudando a seguinte equação:

$$\dot{x} \equiv \frac{d}{dt}x = f(x, \mu) \tag{1.1}$$

Ou seja, um sistema descrito por uma equação diferencial (1.1), onde  $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t$ ,  $\mu \in \mathbb{R}_+$ , com  $U$  aberto,  $t$  e  $\mu$  parâmetros, poderíamos pensar que há uma restrição,

---

\*Como veremos mais adiante a teoria de Sistemas Dinâmicos não é suficiente para o entendimento da turbulência desenvolvida.

pois  $f$  não depende explicitamente do tempo, portanto, estaríamos considerando somente sistemas autônomos. Todavia, podemos lançar mão do seguinte artifício: introduzimos uma variável  $s$ , tal que,  $\frac{ds}{dt} = 1$ . Logo, em termos deste novo parâmetro, o sistema é escrito como:

$$x' \equiv \frac{dx}{ds} = f(x, s) \times 1. \quad (1.2)$$

Criamos, então, um novo sistema  $y$  dado por:

$$\begin{aligned} y &= (x, s) \\ g(y) &= (f(x, s), 1), \end{aligned}$$

obtendo o seguinte sistema :

$$y' = \frac{dy}{ds} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Assim, um sistema não autônomo pode ser transformado em autônomo aumentando sua dimensão.

Denotando uma solução com condição inicial  $x_0(x)$  no instante  $t_0$  por

$$x(t) = x(t, t_0, x_0), \quad (1.4)$$

podemos ver que esta solução define um fluxo

$$\begin{aligned} \phi_t &: U \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (a, t) &\mapsto x(t, 0, a), \end{aligned}$$

que satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}(\phi(x, t))|_{t=\tau} = f(\phi(x, \tau)). \quad (1.5)$$

Neste caso,  $\{\phi_t\}_{t=0}^\infty$  forma um semigrupo parametrizado pelo tempo, pois o fluxo goza das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= id, \\ \phi_t \circ \phi_s &= \phi_{t+s}, \quad t, s \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

definindo portanto, uma família de difeomorfismos  $\phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

De um ponto de vista geométrico,  $x(t, t_0, x_0)$  é uma curva sobre  $\mathbb{R}^n$ , parametrizada pelo tempo  $t$ , tal que, no instante  $t_0$  está em  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e sua tangente satisfaz a equação diferencial (1.1) em todos os tempos. Assim, uma solução de equilíbrio pode ser vista como um ponto fixo do fluxo definido por  $\phi_t$  que, por ser a mais simples possível, é a primeira a ser estudada.

**Definição 1.1** Chamamos  $\bar{x}(t)$  de **ponto fixo** ou **solução de equilíbrio** se  $f(\bar{x}) = 0$ .

Para entender esta definição, basta substituir em (1.1) e verificar que a derivada temporal desta solução é nula, logo o campo não variará no tempo. Como a perda de estabilidade das soluções (conceito que será melhor explicado adiante) é o fenômeno que nos leva ao caos, é importante termos definições precisas. Assim, numa primeira abordagem, poderíamos exigir que soluções próximas permanecessem próximas para qualquer tempo, ou seja:

**Definição 1.2** Uma solução  $\bar{x}(t)$  é dita **L-estável** (Liapunov estável) se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que para qualquer solução  $x(t)$ , satisfazendo  $|\bar{x}(t_0) - x(t_0)| < \delta$ , implica  $|\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$ , para todo  $t > t_0$ .

**Definição 1.3** Uma solução  $\bar{x}(t)$  é dita **assintoticamente estável**, se é L-estável e existe a constante real positiva, tal que para toda solução  $x$  satisfazendo  $|\bar{x}(t_0) - x(t_0)| < a$ , temos  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - x(t)| = 0$ .

O que induz as seguintes definições:

**Definição 1.4** Chamamos os pontos fixos assintoticamente estáveis de **sorvedouros** e os L-estáveis, que não são sorvedouros, de **centro**.

Uma aproximação um pouco mais física sobre a estabilidade é pensarmos no conceito de *perturbação*.

**Definição 1.5** Seja  $F \in C^r(\mathbb{R}^n)$ ,  $r, k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k \leq r$ , e  $\varepsilon > 0$ . Então,  $G \in C^k$  é uma **perturbação de tamanho  $\varepsilon$** , se existe um conjunto compacto  $K \in \mathbb{R}^n$ , tal que,  $F = G \quad \forall x \in \{\mathbb{R}^n - K\}$ , e para todo  $(i_1, \dots, i_n)$ , com  $i_1 + \dots + i_n = i \leq k$ , tivermos  $\left\| \frac{\partial^i}{\partial^{i_1} x_1 \dots \partial^{i_n} x_n} (F - G) \right\| < \varepsilon$ .

**Definição 1.6** *Duas aplicações  $C^r$ ,  $F$  e  $G$  são  $C^k$  equivalentes ou  $C^k$  conjugadas ( $k \leq r$ ), se existe um homeomorfismo  $h \in C^k$ , tal que,  $h \circ F = G \circ h$ . Uma equivalência  $C^0$  é chamada de **equivalência topológica**.*

Seja  $\phi_t(x, t)$  um fluxo cujas perturbações  $\varepsilon$  são  $\phi_t^{\varepsilon_i}(x, t)$ . Então, se elas são topologicamente equivalentes, existe um homeomorfismo  $h$ , tal que,  $\phi_t^{\varepsilon_i}(x, t) \circ h = h \circ \phi_{t_j}^{\varepsilon_j}(x, t)$ , ou seja, existe uma equivalência entre as órbitas geradas por estes dois fluxos. Todavia,  $h$  não tem que necessariamente preservar a parametrização temporal das órbitas, mas quando isto acontece, chamamos o homeomorfismo de **conjugação**.

**Definição 1.7** *Uma aplicação  $F \in C^r(\mathbb{R})$  é estruturalmente estável, se existe um  $\varepsilon > 0$ , tal que, para todas as perturbações de tamanho  $\varepsilon$  de  $F$  são topologicamente equivalentes.*

A importância destes conceitos reside no fato de que por não serem lineares muitos dos sistemas de interesse, necessitamos saber, quando fazemos linearizações, quais informações do sistema não linear ainda estão no modelo linearizado, ou seja, quais são as propriedades locais. A título de ilustração, consideremos o seguinte exemplo: tomemos uma solução arbitrária  $x$ , de um sistema com ponto fixo  $\bar{x}$  e a representemos por:

$$x = \bar{x}(t) + y, \quad (1.6)$$

onde  $y$  é um campo a ser determinado. Agora, substituindo esta expressão na equação diferencial e fazendo expansão em série de potência centrada no ponto fixo, vem

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y} = f(\bar{x}(t)) + \mathcal{D}f(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2), \quad (1.7)$$

onde  $\mathcal{D}$  é operador diferencial no espaço em questão. Mas por (def.1.1) vem:

$$\dot{y} = \mathcal{D}f(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2). \quad (1.8)$$

Desprezando termos de segunda ordem em  $y$ . Ficamos com

$$\dot{y} = \mathcal{D}f(\bar{x}(t))y, \quad (1.9)$$

cuja solução é

$$y(t, \bar{x}) = y_0 \exp \left\{ \int_{t_0}^t dt \mathcal{D}f(\bar{x}(t)) \right\}. \quad (1.10)$$

Para analisarmos o sistema linearizado fazemos a seguinte definição:

**Definição 1.8** Sendo  $x = \bar{x}$  um ponto fixo de  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x}$  será chamado de **ponto fixo hiperbólico**, se nenhum dos autovalores de  $\mathcal{D}f(\bar{x})$  tiver parte real zero.

**Teorema 1.1 (Hartman-Grobman)** Se  $\bar{x}$  é ponto fixo hiperbólico, existe um homeomorfismo  $h$  definido em alguma vizinhança  $U\{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $h(\phi(x, t)) = e^{\mathcal{D}(\bar{x})t}$ . Note-se que este homeomorfismo preserva o sentido de órbita e também pode ser escolhido de forma que a parametrização temporal seja preservada.

**Teorema 1.2** Se todos os autovalores de  $\mathcal{D}f(\bar{x}(t))$  têm parte real negativa para um tempo suficientemente grande, a solução de equilíbrio de  $x = \bar{x}(t)$  do campo vetorial linear é assintoticamente estável.

Assim sendo, poderíamos nos perguntar se esta condição não é excessivamente forte, ou seja, se deixássemos alguns auto-valores serem nulos, será que não teríamos, ainda assim, uma solução estável? Infelizmente o método da linearização não nos dá a resposta, pois neste caso o comportamento da solução é controlado pelos termos de ordem superior em  $y$ , na região gerada por esta variedade local central. Mais adiante, no entanto, voltaremos a este problema. Para evitar as mazelas da linearização, podemos utilizar o seguinte teorema:

**Teorema 1.3 (Estabilidade de Liapunov)** Se  $\bar{x}$  é um ponto fixo e  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$  definida em alguma vizinhança  $U$  de  $\bar{x}$ , tal que:

1.  $V(\bar{x}) = 0$  e  $V(x) > 0$  se,  $x \neq \bar{x}$ ;
2.  $V'(x) \leq 0$  em  $U - \{\bar{x}\}$ , então  $\bar{x}$  é estável.  
Além disso, se
3.  $\dot{V}(x) < 0$  em  $U - \{\bar{x}\}$ , então  $V$  é chamada de **função de Liapunov**. Se pudermos tomar  $U$  como  $\mathbb{R}^n$ , então  $\bar{x}$  é globalmente assintoticamente estável.

Ao estudar sistemas mecânicos, a energia é sempre uma boa candidata para a função de Liapunov, já que é sempre positiva definida e, nos sistemas dissipativos sua derivada temporal é negativa. Logo, para sistemas sem termos dissipativos, nos quais  $\dot{V}(x) \geq 0$ , este método sempre será inconclusivo.

**Definição 1.9** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto. Então,  $S$  é dito **conjunto invariante** sob o campo vetorial  $\dot{x} = f(x)$ , se para qualquer  $x_0 \in S$  existir  $x(t, t_0, x_0) \in S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se a assertiva for válida, somente para tempos positivos  $S$  será chamado de **conjunto positivamente invariante**.*

**Definição 1.10** *Um conjunto invariante  $S \subset \mathbb{R}^n$  é chamado de **variedade invariante**  $C^r$  ( $r \geq 1$ ), se  $S$  tiver a estrutura de uma variedade diferenciável  $C^r$ .*

Com base nestas definições, voltemos a olhar o sistema linearizado.

**Definição 1.11** *Seja  $\bar{x}$  um ponto fixo, e o seu sistema linear associado  $\dot{y} = Ay$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , se representamos  $\mathbb{R}^n$  como uma soma direta de três subespaços denotados por  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$ , tais que*

$$E^s = \text{span}\{e_1, \dots, e_s\}, \quad (1.11)$$

$$E^u = \text{span}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}, \quad (1.12)$$

$$E^c = \text{span}\{e_{s+\mu+1}, \dots, e_{s+\mu+c}\}, \quad (1.13)$$

*sendo  $\{e_1, \dots, e_s\}$ ,  $\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$ ,  $\{e_{s+\mu+1}, \dots, e_{s+\mu+c}\}$  os conjuntos de autovetores de  $A(\bar{x})$  com parte real negativa, com parte real positiva e com parte real nula, respectivamente. Além disso se,*

$$\phi_t(E^\alpha) = E^\alpha, \quad \alpha = s, u, c \quad (1.14)$$

*para todos os tempos. Então chamaremos  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$  de **subespaços estáveis, instáveis e centrais**, respectivamente.*

Observe que  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$  são subespaços invariantes do fluxo linearizado. Mas, se considerarmos o fluxo não linear, eles serão invariantes somente em  $\bar{x}$ . Isto devido a contribuição dos termos de ordem maior em  $y$ , que promovem uma distorção nos autovalores de  $A$  conforme nos distanciamos de  $\bar{x}$ . Por exemplo, seja a solução do sistema autônomo  $x = y + \bar{x}$ ,  $\bar{x}$  ponto fixo. Logo, podemos reescrever a EDO do sistema como

$$\dot{y} = \mathcal{D}f(\bar{x})y + R(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.15)$$

sendo  $R(y) = O(|y|^2)$ . Como existe uma transformação linear  $T$ , que leva a forma linearizada desta equação em uma forma bloco-diagonal

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

onde  $T^{-1}y \equiv (u, v, w) \in \mathbb{R}^s \otimes \mathbb{R}^u \otimes \mathbb{R}^c$ ,  $s + u + c = n$ ,  $A_s$  é uma matriz  $s \times s$  tendo autovalores com parte real negativa,  $A_u$  é uma matriz  $n \times n$  com autovalores de parte real positiva e  $A_c$  é uma matriz  $c \times c$  com autovalores com parte real nula, aplicando esta transformação linear para as coordenadas do problema não linearizado, teremos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= A_s u + R_s(u, v, w) \\ \dot{v} &= A_u v + R_u(u, v, w) \\ \dot{w} &= A_c w + R_c(u, v, w),\end{aligned}\tag{1.17}$$

logo, devemos estudar não os subespaços invariantes sobre o ponto fixo, mas variedades, pois assim, em qualquer ordem de aproximação teremos as propriedades desejadas. Estes fatos nos conduzem ao seguinte teorema:

**Teorema 1.4** *Suponhamos (1.17)  $C^r$  com  $r \geq 2$ . Então, o ponto fixo  $(u, v, w) = 0$  do sistema possui uma variedade estável local  $W_{loc}^s(0) \in C^r$ , de dimensão  $s$ ; uma variedade instável local  $W_{loc}^u(0) \subset C^r$ , de dimensão  $u$ ; uma variedade central local  $W_{loc}^c(0) \subset C^r$ , de dimensão  $c$ . Há uma interseção entre estas variedades em  $(u, v, w) = 0$ . Estas variedades são tangentes ao campo vetorial linearizado na origem  $(E^\alpha, \alpha = s, u, c)$  e, portanto, podem ser por eles representadas localmente. Em particular,*

$$\begin{aligned}W_{loc}^s(0) &= \{(u, v, w) | v = h_v^s(u), w = h_w^s(u), \mathcal{D}h_v^s(0) = \mathcal{D}h_w^s(0) = 0\} \\ W_{loc}^u(0) &= \{(u, v, w) | u = h_u^u(v), w = h_w^u(v), \mathcal{D}h_u^u(0) = \mathcal{D}h_w^u(0) = 0\} \\ W_{loc}^c(0) &= \{(u, v, w) | v = h_v^c(w), u = h_u^c(w), \mathcal{D}h_v^c(0) = \mathcal{D}h_u^c(0) = 0\},\end{aligned}\tag{1.18}$$

com  $|u|$ ,  $|v|$  e  $|w|$  suficientemente pequenos nas expressões para  $W_{loc}^s(0)$ ,  $W_{loc}^u(0)$  e  $W_{loc}^c(0)$ , respectivamente. Vale lembrar que  $h_v^s(u)$ ,  $h_w^s(u)$ ,  $h_u^u(v)$ ,  $h_w^u(v)$ ,  $h_v^c(w)$ ,  $h_u^c(w)$  são funções  $C^r$ . Além disso,  $W_{loc}^s(0)$  e  $W_{loc}^u(0)$  têm propriedades assintóticas de  $E^s$  e  $E^u$ , respectivamente.

Passemos ao estudo de um outro tipo de solução, chamada de solução periódica.

**Definição 1.12** *Uma solução de um sistema autônomo através do ponto  $x_0$  será chamada de **periódica** de período  $T$ , se existir  $T = \min_a \{a; x(t, x_0) = x(t + a, x_0), \quad a > 0\}$ , tal que  $x(t, x_0) = x(t + T, x_0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Considerando um campo vetorial bidimensional sujeito à equação abaixo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{1.19}$$

com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então é verdade que :

**Teorema 1.5 (Critério de Bendixson)** *Se numa região simplesmente conexa  $D \subset \mathbb{R}^2$  a expressão  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$  não for identicamente zero e não mudar de sinal, então (1.19) não possui órbita fechada, inteiramente contida em  $D$ .*

**Teorema 1.6** *Seja  $B(x, y)$  contínua com derivada contínua em uma região simplesmente conexa  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y}$  não for identicamente zero e não mudar de sinal em  $D$ , então (1.19) não possui órbita fechada inteiramente contida em  $D$ .*

Existe um conjunto de resultados chamados de Teoria de Índices para a análise de fluxos bidimensionais, que pode ser resumida da seguinte forma:

Seja  $\Gamma$  qualquer órbita fechada num plano que não contenha nenhum ponto fixo do campo. Movendo-se, por exemplo, no sentido horário(positivo) por  $\Gamma$ , os vetores que representam o campo rotacionam-se, sendo essa rotação de  $2\pi k$  para uma volta completa em  $\Gamma$ , e  $k$  um número inteiro. Este  $k$  é chamado de índice de  $\Gamma$ . O índice de um circuito fechado, não contendo ponto fixo, pode ser calculado pela integração do ângulo dos vetores em cada ponto do circuito  $\Gamma$ , medido em relação a algum sistema de coordenadas escolhido. Assim, o valor de  $k$  é dado por

$$k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \left( \tan^{-1} \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}.\tag{1.20}$$

E a classificação do ponto em questão é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema 1.7 (Teorema dos Índices)** *As seguintes propriedades são válidas:*

1. *O índice de um sorvedouro, uma fonte ou um centro é +1;*
2. *O índice de um ponto de sela hiperbólico é -1;*
3. *O índice de uma órbita fechada é +1;*
4. *O índice de uma curva fechada, não contendo qualquer ponto fixo, é 0;*



5. O índice de uma curva fechada é igual à soma dos índices dos pontos fixos no seu interior.

**Corolário 1.8** *Dentro de qualquer órbita fechada  $\gamma$  deve haver, no mínimo, um ponto fixo. Se existe um, então deve haver uma fonte, um sorvedouro ou um centro. Se todos os pontos fixos em  $\gamma$  são hiperbólicos, então deve haver um número ímpar  $2n + 1$ , dos quais  $n + 1$  são fontes, sorvedouros ou centros.*

Para discutir o comportamento assintótico das soluções, cabem as seguintes definições:

**Definição 1.13** *Um ponto  $x_\omega \in \mathbb{R}^n$  é chamado  $\omega$ -limite de  $x \in \mathbb{R}^n$ , se existe uma seqüência  $\{t_i\}, t_i \uparrow \infty$ , tal que,  $\lim \phi(x, t_i) = x_\omega$ , sendo o conjunto de todos os pontos  $\omega$ -limite denotado por  $\omega(x)$ .*

**Definição 1.14** *Um ponto  $x_\alpha \in \mathbb{R}^n$  é chamado  $\alpha$ -limite de  $x \in \mathbb{R}^n$ , se existe uma seqüência  $\{t_i\}, t_i \uparrow -\infty$ , tal que,  $\lim \phi(x, t_i) = x_\alpha$ , sendo o conjunto de todos os pontos  $\alpha$ -limite denotado por  $\alpha(x)$ .*

**Definição 1.15** *Um ponto  $x_0$  é dito não-errante se, para todo aberto  $U$ , tal que  $x_0 \in U$  existe pelo menos um  $t \neq 0$  tal que  $(\phi(U, t) \cap U) \neq \emptyset$ .*

Da definição anterior, segue que pontos fixos e órbitas periódicas são pontos não-errantes.

Um conceito que se mostrou útil nos estudos de Sistemas Dinâmicos, ao contrário dos conceitos de  $\omega, \alpha$ -limite, foi a idéia de conjunto hiperbólico que conjuntamente com o conceito de conjunto não-errante formam a base para definir atratores estranhos e portanto para formar um cenário de transição à turbulência.

**Definição 1.16** *Dizemos que um conjunto compacto e invariante  $\Lambda$  é hiperbólico para o fluxo  $\phi_t : M \rightarrow M$ , se existe  $C > 0, 0 < \lambda < 1$ , e seu fibrado tangente  $T_\Lambda M$  pode ser continuamente decomposto como a seguinte soma direta:  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ , onde, para todo  $x \in \Lambda$  e todo  $t$ , temos:*

$$\begin{aligned} \forall v \in E_x^u, & \Rightarrow \|\phi_{-t}v\| \leq C\lambda^t \|v\|; \\ \forall v \in E_x^s, & \Rightarrow \|\phi_tv\| \leq C\lambda^t \|v\|. \end{aligned}$$

Ou seja, o espaço tangente de cada ponto de um conjunto hiperbólico pode ser decomposto como a soma direta de um subespaço estável com um instável.

**Definição 1.17** *Um conjunto invariante fechado  $A \subset \mathbb{R}^n$  é chamado **conjunto atrator**, se existe alguma vizinhança  $U$  de  $A$ , tal que*

$$\forall x \in U, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \phi(x, t) \in U, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t) = A. \quad (1.21)$$

Segue da definição que o conjunto  $A = \bigcap_{t>0} \phi(t, M)$  é um conjunto atrator.

**Definição 1.18** *Se  $B = \bigcup_{t \leq 0} \phi(U, t)$ , onde  $U$  é tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(U, t) = A$ , onde  $A$  é o conjunto atrator. Então,  $B$  é chamado de **bacia de atração** de  $A$ .*

**Definição 1.19** *Um conjunto fechado e conexo  $M$  é chamado de **região de aprisionamento**, se  $\phi(t, M) \subset M, \forall t \geq 0$ .*

**Definição 1.20** *Um conjunto invariante fechado  $A$  é **topologicamente transitivo** se, para quaisquer dois abertos  $U, V \subset A$ ,  $\exists t \in \mathbb{R}$ , tal que  $\phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$ .*

**Definição 1.21** *Um conjunto  $A$  é chamado de **atrator**, se  $A$  é um conjunto atrator, e além disto, for topologicamente transitivo.*

**Definição 1.22** *Chamamos um fluxo  $\phi_t(x, t)$  de **fluxo tipo Axioma A** se o conjunto dos pontos não-errantes  $\Omega$  de  $\phi_t$  goza das seguintes propriedades: compacto, hiperbólico e os pontos fixos e as órbitas periódicas são densos em  $\Omega$ .*

**Definição 1.23** *Chamamos um conjunto  $U$  de **tipo Axioma A** se goza das seguintes propriedades: invariante, hiperbólico e os pontos fixos e as órbitas periódicas são densos em  $U$  e  $\phi$  é topologicamente transitivo sobre  $U$ .*

**Definição 1.24** *Chamamos um conjunto  $\Lambda$  tipo Axioma A de **atrator tipo Axioma A**, se existe  $U$ , tal que  $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U)$ .*

**Proposição 1.1** *Seja  $\phi$  um fluxo e  $M$  um conjunto compacto invariante por  $\phi$ . Então, para todo  $p \in M$  vale:*

1.  $\omega(p) \neq \emptyset$ ;

2.  $\omega(p)$  é fechado;
3.  $\omega(p)$  é invariante sobre o fluxo;
4.  $\omega(p)$  é uma união de órbitas fechadas;
5.  $\omega(p)$  é convexo.

**Lema 1.1** *Se  $\omega(p)$  não tem pontos fixos, então  $\omega(p)$  é uma órbita fechada.*

**Lema 1.2** *Sejam os pontos fixos  $p_1 \neq p_2 \in \omega(p)$ , dentro de uma região de aprisionamento. Então existe, no máximo, uma órbita  $\gamma \subset \omega(p)$ , tal que  $\alpha(\gamma) = p_1$  e  $\omega(\gamma) = p_2$ .*

Para fluxos bidimensionais, podemos classificar completamente toda a família de conjuntos  $\omega(x)$  associada aos pontos de um conjunto invariante, pelo seguinte teorema:

**Teorema 1.9 (Poincaré-Bendixson)** *Seja  $p \in M \subset \mathbb{R}^2$ , sendo  $M$  uma região positivamente invariante para o campo vetorial contendo um número finito de pontos fixos. Então, uma das afirmações abaixo, mutuamente excludentes, é verdadeira:*

1.  $\omega(p)$  é um ponto fixo;
2.  $\omega(p)$  é uma órbita fechada;
3.  $\omega(p)$  consiste em um número infinito de pontos fixos  $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$  e órbitas  $\gamma$  com  $\alpha(\gamma) = p_i$  e  $\omega(\gamma) = p_j$ .

*Ou seja, os atratores de um fluxo bidimensional só podem ser de três tipos:*

- (a) pontos fixos;
- (b) órbitas fechadas;
- (c) união de ponto fixos e órbitas fechadas, geradas pelas intersecções das variedades estáveis e instáveis destes pontos fixos, ou seja, órbitas de pontos fixos hiperbólicos.

**Teorema 1.10 (Hopf)** *Se o sistema  $\dot{x} = f_{\mu}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  possui um ponto fixo  $(x_0, \mu_0)$ , tal que as seguintes propriedades são verificadas:*

- H1  $D_x f_{\mu_0}(x_0)$  tem um par de autovalores imaginários, e nenhum outro autovalor com parte real nula.*

Então (H1), implica que existe uma curva suave de pontos fixos  $(x_\mu, \mu)$  com  $x_{\mu_0} = x_0$ , sendo que os autovalores  $\lambda_\mu$  e  $\lambda_\mu^*$  de  $D_x f_{\mu_0}(x_\mu)$  variam suavemente com  $\mu$ . Se, além disto, valer

$$H2 \quad \left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda_\mu)}{d\mu} \right|_{\mu_0} = d \neq 0,$$

então, existe, uma única variedade central tridimensional passando por  $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e um sistema de coordenadas suaves, tal que a expansão de Taylor até terceira ordem sobre a variedade central é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y, \\ \dot{y} &= (d\mu + a(x^2 + y^2))y - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x. \end{aligned}$$

Portanto temos três casos:

Se  $a \neq 0$ , existe uma superfície de soluções periódicas na variedade central que possui tangenciamento quadrático com os autoespaços de  $\lambda_{\mu_0}$ , e  $\lambda_{\mu_0}^*$ , dado (com correção até segunda ordem) pelo parabolóide  $\mu = -\frac{a}{d}(x^2 + y^2)$ .

Se  $a < 0$ , então estas soluções periódicas são ciclos limites estáveis.

Se  $a > 0$ , então estas soluções são repulsivas.

**Teorema 1.11 (Peixoto)** *Um campo vetorial  $C^r$  sobre uma variedade  $M^2$  bidimensional diferenciável compacta é estruturalmente estável, se e somente se,*

1. O número de pontos fixos e órbitas periódicas é finito, sendo todos hiperbólicos;
2. Não existe órbita conectando pontos de sela;
3. O conjunto não-errante é formado por pontos fixos e órbitas periódicas.

Além do mais, se  $M^2$  é orientável, o conjunto dos campos estruturalmente estáveis é aberto e denso em  $H^r(M^2)^\dagger$ .

**Definição 1.25** *Seja  $\Sigma_T(\tilde{x})$  uma superfície transversal a  $\dot{x}(t, x_0)$ , órbita periódica de período  $T$ , em um ponto  $\tilde{x} = x(t_1, x_0)$  para algum  $t_1$ . Chamamos  $\Sigma_T(\tilde{x})$  de secção de Poincaré.*

**Definição 1.26** *Chamamos de aplicação de Poincaré, a aplicação  $P : V \subset \Sigma_T(\tilde{x}) \rightarrow \Sigma_T(\tilde{x})$ , tal que para todo  $x \in V$ ,  $P(x) = \phi(x, T)$ , onde  $\Sigma_T(\tilde{x})$  é a secção de Poincaré do fluxo  $\phi$ , e  $V \subset \Sigma_T(\tilde{x})$  um subconjunto aberto.*

---

<sup>†</sup>O espaço de Hilbert dos campos  $C^r$  sobre  $M^2$ .

Para ilustrar estas definições, vamos a um exemplo simples. Seja um sistema periódico no tempo, i.e.,  $f(x, t) = f(x, t + 2\pi)$ , podendo ser facilmente reduzido a

$$\dot{x} = f(x, \theta) \quad (1.22)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1. \quad (1.23)$$

Portanto, seu fluxo será  $\phi(x, t) = (x(t), \theta(t))$ , com  $\theta(t) = \omega(t) + \theta_0, (\text{mod } 2\pi)$ . Definimos uma seção transversal  $\Sigma_\tau(\theta_0) = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1; \theta = \theta_0 \in [0, 2\pi]\}$ , que é a seção de Poincaré, sendo que neste exemplo, em particular, ela é global, exceto o caso  $\omega = 0$ . Da definição de aplicação de Poincaré segue

$$P : x \left( \frac{\theta - \theta_0}{\omega} \right) \mapsto x \left( \frac{\theta - \theta_0 + 2\pi}{\omega} \right), \quad (1.24)$$

ou seja, a aplicação de Poincaré é uma geratriz arbitrária do cilindro infinito  $\mathbb{R} \times S^1$ .

**Definição 1.27** *Seja  $A$  um espaço métrico compacto,  $N(r, A)$  a menor cobertura de  $A$  com abertos de raio  $r$ . Chamamos de **dimensão de capacidade**, e denotamos por  $\dim_K A$ , a quantidade*

$$\dim_K A = - \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r, A)}{\log r}. \quad (1.25)$$

**Definição 1.28** *Seja  $A$  conjunto não-vazio,  $\sigma$  uma cobertura finita, cujo  $k$ -ésimo conjunto  $\sigma_k$  tem diâmetro  $d_k = \dim \sigma_k < r$ . Dado  $\alpha$  positivo, e  $m_r^\alpha(A) = \inf_\sigma \sum_k (d_k)^\alpha$ , definimos a **dimensão Hausdorff** de  $A$ , como*

$$\dim_H A = \sup \left\{ \alpha; \lim_{r \rightarrow 0} m_r^\alpha(A) > 0 \right\}. \quad (1.26)$$

**Teorema 1.12 (Sinai-Ruelle-Bowen)** *Se  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um fluxo classe  $C^2$  e possui um atrator hiperbólico  $A$ . Então, existe uma única medida  $\mu$ , com suporte em  $A$ . Então, dada uma  $g$  contínua q.t.p.  $[\lambda]^\dagger$  vale:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^T g(\phi_t(x)) dt = \int_A g d\mu. \quad (1.27)$$

---

<sup>†</sup> Abreviação para quase por toda parte em relação à medida de Lebesgue.

## 1.2 Um Mecanismo Matemático para a Transição à Turbulência

O primeiro cenário para a transição à turbulência que existiu, foi o proposto Landau [40]. Neste cenário, o fluxo vai passando por bifurcações de Hopf sucessivas, com o aumento do Número de Reynolds. Ou seja, o fluxo migraria de um  $n$ -tóro para um  $(n+1)$ -tóro, numa série infinita! Embora este cenário concorde com a intuição, ele não é correto, pois experimentalmente e em simulações numéricas [18, 42], após o 3-tóro, o fluxo já se torna turbulento, e não somente aperiódico<sup>§</sup>[46].

Tentemos agora fazer uma reconciliação dos conceitos expostos acima com a situação encontrada na equação de Navier-Stokes bidimensional, já que para a tridimensional nem mesmo temos provas de existência[52]. Identificaremos elementos da Teoria de Sistemas Dinâmicos na equação de Navier-Stokes e ordenaremos os resultados acima, mostrando como estes constroem quadros de transição à Turbulência.

Escrevendo a equação de Navier-Stokes como

$$\frac{d}{dt}x = X_{Re}(x), \quad (1.28)$$

para  $Re = 0$ , o sistema tem uma solução  $x = 0$ . Consideremos agora, o jacobiano desta solução

$$J_k^l = \frac{\partial X_0^j}{\partial x^k}(0) \quad (1.29)$$

que tem parte real negativa, ou seja,  $x = 0$  é um ponto fixo atrativo. Assim, o determinante do jacobiano é não nulo. Então, pelo Teorema da Função Implícita, existe  $\xi_{Re}(t)$ , chamada solução estacionária, dependendo continuamente de  $Re$ , tal que

$$X_{Re}(\xi_{Re}) = 0, \quad (1.30)$$

ou seja, para todo  $Re$  existirá uma solução de ponto fixo(solução estacionária). Mas, por continuidade, o jacobiano de  $\xi_{Re}$ , denotado por  $J_k^l[\xi_{Re}]$ , para um número de Reynolds suficientemente pequeno, deve ter parte real negativa.

---

<sup>§</sup>Onde consideramos um número de Reynolds suficientemente grande( $10^6$ ).

Ao aumentarmos o Número de Reynolds, a parte real dos autovalores pode se anular, fazendo com que os pontos fixos se unam ou desapareçam. Ou que sucessivos pares de autovalores complexos possam cruzar o eixo imaginário. Logo pelo teorema de Hopf o que era um ponto fixo (solução estacionária), passa a ser uma órbita periódica (solução periódica), sendo sua amplitude proporcional ao Número de Reynolds. Todavia, à medida que aumentamos  $Re$ , podemos ter uma outra bifurcação de Hopf ou transformação de uma órbita periódica em uma quase-periódica. Sendo assim, pelo Teorema de Peixoto, a vizinhança desta órbita está em um conjunto que é o complemento de um subconjunto denso e aberto do espaço de Hilbert dos campos  $C^r$  sobre o tóro. Este conjunto, em diversas situações, é um atrator, sendo este conjunto que define o chamado cenário de transição à Turbulência.

O mais conhecido cenário, por ser o mais antigo (1971, 1978), é o chamado Cenário de Ruelle-Takens, embasado no seguinte teorema:

**Teorema 1.13 (Newhouse-Ruelle-Takens)** *Seja  $v$  um campo vetorial constante sobre um tóro  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . Se  $n \geq 3$ , toda vizinhança  $C^2$  de  $v$  contém um campo vetorial  $\tilde{v}$  com um atrator estranho tipo Axioma A. Se  $n \geq 4$ , podemos tomar  $C^\infty$  em vez de  $C^2$ .*

Como o teorema exige  $n \geq 3$ , então o sistema deve passar primeiro por três bifurcações de Hopf antes de encontrar o atrator estranho ¶ tipo Axioma A.

O cenário de Feigenbaum consiste em um processo de duplicação infinito de períodos da órbita em um intervalo finito de variação do Número de Reynolds, sendo este atrator aperiódico, ou seja, composto por órbitas estáveis de período  $2^\infty$ . Assim, o sistema migra para a fase turbulenta por intermédio de bifurcações, como as do tipo *pitchfork* até que o Número de Reynolds atinja seu valor crítico e o sistema se estabeleça em um atrator aperiódico e ergódico.

Como fica patente pela exposição acima, a aproximação, através da Teoria de Sistemas Dinâmicos, não nos traz informações sobre a estrutura espacial do fluxo. Por exemplo, não nos diz quais são os eventos físicos associados à mudança das propriedades do espaço de Hilbert das soluções, existência das regiões inerciais, leis

---

¶ Um atrator tipo Axioma A é chamado de estranho, se apresenta sensibilidade em relação as condições iniciais, i.e., a distância de duas órbitas cresce exponencialmente no tempo.

de potência. Logo, se desejarmos caracterizar a estrutura espacial das soluções assintóticas, é muito útil lançar mão sobre a hipótese de ergodicidade, via Teorema Sinai-Ruelle-Bowen. Partindo desta hipótese, que estes atratores são ergódicos, podemos trocar os cálculos espaço-temporais por médias sobre o atrator e vice-versa, ou seja, estaremos fazendo uma análise estatística da Turbulência(ver Ruelle em[50]).



## Capítulo 2

### Processos Estocásticos

Este capítulo vai no mesmo espírito do anterior, assim que, para as pessoas sem contato prévio com o assunto, aconselhamos as seguintes referências: [1, 16, 27, 38, 53].

#### 2.1 Conceitos Básicos

**Definição 2.1** *Uma tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é chamada de **espaço de probabilidade**, se  $\Omega$  é um conjunto não-vazio,  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra minimal sobre os borelianos de  $\Omega$ , e  $P : \Omega \rightarrow E$  uma medida de probabilidade sobre o espaço linear  $E$ .*

**Definição 2.2** *Uma **variável aleatória**  $x$  sobre o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é uma função  $x : \Omega \rightarrow E$  mensurável em relação a  $\mathcal{F}$ .*

**Definição 2.3** *Um **Processo Estocástico** é uma coleção de variáveis aleatórias  $X$  definidas em um mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , indexados por elementos de um conjunto de parâmetros  $T$ . Quando  $T = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+$ , também chamamos o processo de **seqüência aleatória**, se  $T = \mathbb{R}^n$  chamamos de **campo aleatório** ou **função aleatória**.*

**Definição 2.4** *Se  $X$  é um processo estocástico, então para  $t \in T, \omega \in \Omega, x_t(\omega) \equiv x(t, \cdot) : \Omega \rightarrow E$ , é mensurável em relação a  $\mathcal{F}$ ; por outro lado  $x_\omega(t) \equiv x(\cdot, \omega) : T \rightarrow E$  é contínua em relação a  $T$ , sendo chamada de **trajetória** ou **realização do processo**.*

**Definição 2.5** *Seja  $\{t_i\}_{i=1}^n \in T$ , uma seqüência nos índices e  $C \in \mathcal{B}(E^n)$  um boreliano no espaço linear  $E^n$ . Definimos a **distribuição finita** por  $P_{t_1 \dots t_n}(C) = P(\{\omega \in \Omega; (x(t_1, \omega), \dots, x(t_n, \omega)) \in C\})$ .*

Assim, a distribuição finita é uma medida de probabilidade sobre  $\mathcal{B}(E^n)$ , já que  $x(t_i, \cdot)$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável para cada  $t_i \in T$ . Há um teorema de Kolmogorov que garante a recíproca da afirmação anterior.

**Teorema 2.1 (Kolmogorov)** *Dado um conjunto  $T$  e uma família de medidas  $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$  sobre um espaço linear  $E$  satisfazendo:*

1.  $P_{t_1 \dots t_j \dots t_n}(C) = P_{t_j t_2 \dots t_1 \dots t_n}(C)$ , para todo  $C \in \mathcal{B}(E^n)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , ou seja, invariância por permutação em  $T$ .
2.  $P_{t_1 \dots t_j \dots t_n}(y_1, \dots, y_j, \infty, \dots, \infty) = P_{t_1 \dots t_j}(y_1, \dots, y_j)$ .

*Então, existe, pelo menos um processo aleatório  $X$ , definido sobre um espaço  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , tal que as medidas  $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$  são funções de distribuição finita do processo  $X$ .*

Portanto, não precisamos nos preocupar, em primeira análise, com a medida no espaço de probabilidade, pois as distribuições induzidas no espaço linear, no nosso caso o  $\mathfrak{R}^n$ , já nos dão informações suficientes sobre o processo estocástico em questão.

**Definição 2.6** *Definimos o  $n$ -ésimo **momento** da variável aleatória  $x$  por:*

$$\langle x^n \rangle \equiv E(x^n) = \int_{\Omega} x^n(\omega) dP(\omega) = \int_E x^n(w) d\lambda(w). \quad (2.1)$$

Logo, para  $E = \mathfrak{R}$  teremos:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n(k) \left[ \frac{d}{dk} P_x(k) \right] dk, \quad (2.2)$$

pois,  $P_x(k)$  é a distribuição finita, não a densidade de probabilidade. Vale lembrar aqui que a derivada tomada em (2.2), é a derivada no sentido do teorema de Radon-Nikodym, ou seja,  $\frac{d}{dk} P_x(k)$  é uma distribuição, e não é necessariamente absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

**Definição 2.7** *Se um processo é tal que para todo elemento de  $T$ ,  $E(|x_t|^2) < \infty$ , então o chamamos de **processo de segunda ordem**.*

Observe que podemos construir classes de funções iguais em quase todos os pontos e quadrado integrável\*. Essas classes, vistas como elementos de um conjunto, podem ser consideradas como um espaço de Hilbert  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , quando definimos a norma e o produto interno pelas relações:

$$(x, y) \equiv E(xy^*), \quad \|x\| \equiv \sqrt{E(|x|^2)}. \quad (2.3)$$

**Definição 2.8** Definimos a **covariância**, chamada em turbulência de **correlação**, por  $K(s, t) = E(x_s x_t^*) = (x_s, x_t^*)$  com  $s, t \in T$ .

Agora que já temos os conceitos básicos, passemos para a próxima etapa, que é a construção do cálculo para processos estocásticos.

A abordagem escolhida é a que nos parece mais intuitiva, por ser mais parecida formalmente com o cálculo usual. Adotaremos, doravante,  $T = \mathfrak{R}$ , e assumiremos que todos os processos estocásticos são de segunda ordem, ou seja, tem covariância finita. Com isto esperamos facilitar o entendimento. Mas, cabe ressaltar que existem trabalhos, nos quais são considerados processos mais gerais[8, 44] para a descrição dos vórtices do campo de velocidade de um fluxo turbulento.

## 2.2 Cálculo Diferencial

Diremos que  $\lim_{t \rightarrow t_0} x_t = y$ , se  $y \in L_2$  e  $\lim_{t \rightarrow t_0} E(|x_t - y|^2) = 0$ , ou seja, diremos que o limite existe se ele converge na média quadrática.

Assim definimos

$$\frac{d}{dt} x_t = x'_t, \quad (2.4)$$

se  $x'_t \in L_2$  e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{x_{t+h} - x_t}{h} - x'_t \right\| = 0. \quad (2.5)$$

Obviamente diremos que  $x_t$  é diferenciável, se a derivada existe, neste sentido.

---

\*Funções que diferem sobre um conjunto de medida nula são identificadas e geram uma classe. As classes, produzidas sob esta identificação, geram um espaço que goza da propriedade de todos os seus elementos(classes de equivalência), serem quadrado-integráveis.

Como os processos de segunda ordem são caracterizados, a menos de uma isometria no espaço de Hilbert, pela covariância, a proposição abaixo é muito útil.

**Proposição 2.1** *Dado um processo estocástico de segunda ordem  $X$  valem as seguintes propriedades:*

1. Se  $\lim_{t \rightarrow t_0} x_t$  existe  $\iff \lim_{s, t \rightarrow t_0} K(s, t)$  existe.
2. Se  $\{x_t\}$  é contínuo em  $t = t_0 \iff K(s, t)$  é contínuo em  $(t_0, t_0)$ .
3.  $x_t$  existe, se somente se,

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} \{K(t+h, t+k) - K(t+h, t) - K(t, t+k) + K(t, t)\} \quad (2.6)$$

existe.

4.  $\{x_t\}$  é continuamente diferenciável em  $(a, b) \iff \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} K(s, t)$  existe e é contínua  $\forall s, t \in (a, b)$ .

**Definição 2.9** *Um processo é dito **estacionário** se suas distribuições finitas são invariantes sob translação<sup>†</sup>, ou seja, se para todo  $n$  fixo e toda seqüência  $\{t_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}$ , e  $h \in \mathbb{R}$  tivermos  $P_{t_i \dots t_n}(C) = P_{t_i+h \dots t_n+h}(C)$ ,  $C \in \mathcal{B}(E^n)$ .*

**Definição 2.10** *Um processo  $X$  é dito **estacionário num sentido amplo**, se a função covariância é invariante sob translação, ou seja,  $K(s, t) = K(s+h, t+h)$ .*

**Definição 2.11** *Dizemos que o processo é de **incrementos estacionários**, se para todo  $n$  fixo e toda seqüência  $\{t_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}$ , e  $h \in \mathbb{R}$  a distribuição conjunta dos incrementos  $(x_{t_2} - x_{t_1}), \dots, (x_{t_n} - x_{t_{n-1}})$  é invariante pela troca  $t_i \rightarrow t_i + h$ .*

**Definição 2.12** *Chamamos um processo  $W$  de **movimento browniano**,<sup>‡</sup> se for de incrementos estacionários, independentes, contínuo na média e de quadrado integrável.*

**Teorema 2.2** *Todo movimento browniano  $W$  com  $W_0 = 0$ , centrado na média, goza das seguintes propriedades:*

---

<sup>†</sup>Normalmente, quando a família de parâmetros  $T = \mathbb{R}^n$  representa um processo no espaço físico, o chamamos de **homogêneo**; se representa o tempo chamamos de **estacionário**.

<sup>‡</sup>Os matemáticos chamam-no de **processo de Wiener**

1.  $E(W_t) = \mu t, \mu = E(W_1)$ .
2.  $E(W_t^2) = \sigma^2 t, \sigma^2 = E(W_1^2)$ .
3.  $K(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$ .
4.  $W$  é contínuo, mas não diferenciável (em relação ao tempo).

### Prova

1. Observe que:  $E(W_{t+s}) = E(W_t) + E(W_{t+s} - W_t) = E(W_t) + E(W_s)$ , como  $W$  é contínuo na média, a expectativa deve ser contínua, como  $E(W_0) = 0$  teremos 1.).
2. Por analogia com o item 1.), vem:  $E(W_{t+s}^2) = E(W_t^2) + E[(W_{t+s} - W_t)^2] = E(W_t^2) + E[(W_s - W_{t-t})^2] = E(W_t^2) + E(W_s^2)$ , pelas mesmas razões de 1.) segue o resultado 2.).
3. Por ser  $K(s, t) = E(W_s W_t) = \frac{1}{2} \{E(W_t^2) + E(W_s^2) - E(|W_t - W_s|^2)\} = \frac{\sigma^2}{2} \{t + s - |t - s|\}$ .
4. Por (2.6), a derivada do processo só existe se o limite equivalente de covariância existe. Como é fácil ver por 3.), este limite não existe, logo  $W$  não é diferenciável.

## 2.3 Cálculo Integral

Seja um processo estocástico  $X$ , assumindo valores em um espaço de Banach  $V$  arbitrário,  $P$  uma partição de  $[a, b] \in \mathfrak{R}$ ,  $\delta(P) = \max\{(t_{i+1} - t_i); t_{i+1}, t_i \in \mathfrak{R}\}$ , o maior intervalo da partição  $P$ ,  $\zeta_i \in [t_i, t_{i+1}]$ , um ponto do  $i$ -ésimo intervalo, onde  $0 \leq i \leq n - 1$ .

**Definição 2.13** Definimos soma de Riemann da função  $\{x_t\}$  o vetor:

$$S_P = \sum_{i=0}^{n-1} x_{\zeta_i} (t_{i+1} - t_i). \quad (2.7)$$

**Definição 2.14** *Se o limite da soma de Riemann, quando  $\delta(P) \rightarrow 0$ , existe, dizemos que  $\{x_t\}$  é **Riemann integrável** em  $[a, b]$  e escrevemos:*

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S_P = \int_a^b x_t dt. \quad (2.8)$$

**Proposição 2.2** *A  $\int_a^b x_t dt$  existe, se e somente se,  $\int_a^b ds \int_a^b dt K(s, t)$  existe no sentido de Riemann e vale a igualdade:*

$$\int_a^b ds \int_a^b dt K(s, t) = \left\| \int_a^b x_t dt \right\|^2. \quad (2.9)$$

**Proposição 2.3** *Seja  $y$  quadrado-integrável. Então, o produto interno e a integração comutam, ou seja, vale a seguinte igualdade:*

$$\left( y, \int_a^b dt x_t \right) = \int_a^b dt (y, x_t). \quad (2.10)$$

Fica claro que podemos estender vários resultados clássicos para esta integral, tais como o Teorema Fundamental do Cálculo, integrais impróprias e integração por partes. Existe outra formulação mais sofisticada, que se assemelha a de Lebesgue, que nos permite fazer integrais sobre processos estocásticos, embora seja mais abstrata.

### 2.3.1 Integração estocástica

Como já vimos, as variáveis aleatórias induzem uma medida sobre a álgebra gerada pelos subconjuntos de seu contradomínio, chamada função de distribuição finita. Onde, surge a seguinte pergunta: Quais as condições que um processo estocástico deve satisfazer para induzir uma medida no espaço das funções de  $T \rightarrow V$ , com  $T$  conjunto de parâmetros e  $V$  um espaço de Banach?

Buscamos definir  $\int_T f dx_t, \forall f \in L_2(T, dF)$  tal que,  $dF$  seja uma medida que dependa de um processo estocástico. Ou seja, desejamos construir uma integral estocástica que nos permita saber o valor médio de funções que dependem de processos estocásticos, por exemplo: valores esperados e representação espectral de processos estocásticos.

**Definição 2.15** Dizemos que uma função aleatória possui **incrementos ortogonais**, se  $\forall (a, b), (c, d) \in T; (a, b) \cap (c, d) = \emptyset$  tivermos  $(x_b - x_a, x_d - x_c) = 0$

**Teorema 2.3** Seja  $\{x_t\}$  uma função aleatória de segunda ordem com incrementos ortogonais. Então, existe  $F : T \rightarrow \mathbb{R}$ , função não decrescente real, tal que,  $F$  é uma medida sobre a reta induzida pelo processo  $\{x_t\}$ . Sendo  $F$  definida por:

$$\begin{aligned} F(t) &= E \left\{ |x_t - x_{t_0}|^2 \right\}, t > t_0 \\ F(t) &= -E \left\{ |x_t - x_{t_0}|^2 \right\}, t \leq t_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por (2.11) fica claro que:  $x_t$  é contínuo em  $t$ , se somente se,  $F(t)$  é contínua em  $t$ . Agora estamos aptos a construir a integração estocástica.

**Definição 2.16** Seja  $f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i I_{(t_i, t_{i+1})}(t)$  uma função escada onde cada  $t_i$  é ponto de continuidade de  $F$ . Definimos a **integral estocástica** de  $f$  pelo processo  $\{x_t\}$  por:

$$\int_T f dx_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{t_{i+1}} - x_{t_i}). \quad (2.12)$$

O ponto importante é que a correspondência  $\int_T f dx_t \leftrightarrow f$  é uma isometria entre o espaço das variáveis aleatórias da forma dada pela equação acima e o conjunto das funções-escada consideradas como elementos de  $L_2(T, dF)$ . Mostremos esta afirmação por intermédio de um cálculo simples:

$$\begin{aligned} \left\| \int_T f dx_t \right\|^2 &= E \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_i c_j^* (x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) (x_{t_{j+1}}^* - x_{t_j}^*) \right\} = \\ \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|^2 E \left\{ |x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|^2 \right\} &= \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|^2 [F(t_{i+1}) - F(t_i)] = \int |f(t)|^2 dF(t). \end{aligned}$$

Como para toda  $f$ , Borel mensurável em  $T$ , existe uma seqüência crescente de funções-escada<sup>§</sup>  $\{f_n\}$ , tal que,  $\lim f_n = f$ , a seqüência de funções-escada é uma seqüência de Cauchy. Então, usando o Teorema da Completeza para o espaço  $L_2(T, dF)$ , temos assegurada a relação  $f \in L_2(T, dF)$ . Mas pela isometria,  $\{\int_T f_n dx_t\}$  é uma seqüência de Cauchy em  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Em seguida, aplicando o Teorema da Convergência Monótona vem  $\lim \int_T f_n dx_t = \int_T f dx_t$ . Vale a pena

<sup>§</sup>O que está por trás desta argumentação é que o conjunto das funções escadas é denso neste espaço.

notar que a integração não precisa ser sobre  $T$ , mas pode ser sobre qualquer conjunto de Borel em  $T$ . Desta forma, a integração estocástica gera um novo processo estocástico com incrementos ortogonais.



## Parte II

### Turbulência Desenvolvida

## Capítulo 3

### Teoria de Kolmogorov

Os modelos para a turbulência são devidos à inexistência de condições que fechem o sistema, ou seja, o cálculo da correlação de segunda ordem envolve a de terceira ordem, o cálculo da correlação de terceira ordem envolve a de quarta ordem, e assim sucessivamente, levando a um sistema indeterminado, infinito, e acoplado de equações diferenciais parciais. Um método para atacar esta situação é fazer uma hipótese que feche o sistema em alguma ordem.

O modelo de Kolmogorov[34, 35] foi sugerido em 1941 para explicar quais as condições suficientes para obtermos a chamada Lei dos  $2/3^*$  e nos dá também uma expressão para a correlação de terceira ordem. Buscando um melhor entendimento, seguiremos por etapas. A obtenção da relação de Kármán-Howarth[33] é um primeiro passo para o entendimento do problema, pois gera o cenário onde as diversas teorias entrecruzam-se e buscam respaldo teórico e experimental [2, 53]. Depois explicaremos brevemente as leis experimentais; passaremos para as hipóteses de Kolmogorov e suas implicações limítrofes; exporemos os argumentos de Landau[40] e Kraichnan[18], contra a universalidade da constante de Kolmogorov.

---

\*A Lei dos  $2/3$  diz que a correlação tem um comportamento assintótico tipo  $r^{2/3}$  para um fluxo isotrópico e homogêneo

### 3.1 Simetria e Tensores de Correlação

Consideremos, primeiramente, o caso da correlação de segunda ordem das componentes da velocidade entre os pontos  $P(x_1, x_2, x_3)$  e  $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$  definida por:

$$E\{u_i u'_k\} = E\{u \cdot u\} R_{ik}. \quad (3.1)$$

Calculando a correlação entre a componente da velocidade  $u(P, t)$ , baseada em  $P$  numa direção arbitrária  $a_i$  e a componente da velocidade  $u' \equiv u(P', t)$ , baseada em  $P'$  numa direção arbitrária  $b_k$ , temos:

$$E\{u \cdot u\} R(a, b) = E\{u_i u'_k\} a_i b_k, \quad (3.2)$$

mas por (3.1) podemos reescrever a relação acima como

$$R(a, b) = R_{ik} a_i b_k. \quad (3.3)$$

Se impusermos que  $R(a, b)$  deva ser invariante sob rotações de corpo rígido<sup>†</sup> e translações, para executarmos a invariância translacional, basta termos uma dependência funcional somente na distância relativa, ou seja, em  $r_i = (x'_i - x_i)$ ,  $a_i, b_k$ . Por conseguinte, a pergunta que se impõe é: Qual a função mais geral  $R(r; a, b)$  da forma de (3.3) que é invariante sob rotações arbitrárias dos vetores  $r_i, a_i, b_k$ ?

A princípio poderíamos pensar que qualquer contração dos três vetores  $(r, a, b)$  pudesse aparecer na função para  $R(r; a, b)$ . Entretanto, por (3.3),  $R(r; a, b)$  deve ser uma função bilinear em  $a$  e  $b$ , i.e., não devem participar termos como  $a \cdot a$  e  $b \cdot b$ . Portanto  $R$  pode ter no máximo a seguinte forma:

$$R(r; a, b) = A(r \cdot a)(r \cdot b) + B(a \cdot b) + C(rab), \quad (3.4)$$

onde  $A, B, C$  funções de  $r^2$ .

Comparando (3.3) com a equação acima, é fácil concluir que:

$$R_{ik} = A(r^2) r_i r_k + B(r^2) \delta_{ik} + C(r^2) \epsilon_{ikl} r_l. \quad (3.5)$$

---

<sup>†</sup>Isto quer dizer que as reflexões são deixadas de fora.

Agora voltemos nossa atenção para o tensor de correlação de terceira ordem a dois pontos, que é definida por:

$$E \{u_i u_j u'_k\} = [E \{u \cdot u\}]^{3/2} T_{ijk}(r). \quad (3.6)$$

Exigindo homogeneidade (invariância translacional) e invariância rotacional do escalar

$$T(r; a, b, c) = T_{ijk} a_i b_j c_k, \quad (3.7)$$

onde  $a_i$  e  $b_j$  são vetores baseados em  $P$  e  $c_k$  baseado em  $P'$ .

As contrações possíveis, já que  $T(r; a, b, c)$  tem que ser linear em  $a, b, c$ , são:

$$r \cdot r, \quad r \cdot a, \quad r \cdot b, \quad r \cdot c, \quad a \cdot b, \quad a \cdot c, \quad b \cdot c, \quad (rabc), \quad (abc). \quad (3.8)$$

Logo sua forma é:

$$\begin{aligned} T(r; a, b, c) = & T_1(r \cdot a)(r \cdot b)(r \cdot c) + T_2(r \cdot a)(b \cdot c) + \\ & + T_3(r \cdot b)(a \cdot c) + T_4(r \cdot c)(a \cdot b) + T_5(rabc) + T_6(abc). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por (3.6) e pela equação acima vem:

$$T_{ijk}(r) = T_1 r_i r_j r_k + T_2 r_i \delta_{jk} + T_3 r_j \delta_{ik} + T_4 r_k \delta_{ij} + T_5 \epsilon_{ijkl} r_l + T_6 \epsilon_{ijk}, \quad (3.10)$$

onde os  $T_i$ 's são função de  $r^2$ .

### 3.2 A Relação de Kármán-Howarth

Consideremos a equação de Navier-Stokes, tal que, o campo de velocidades e a força sejam estatisticamente isotrópicos e homogêneos.

$$\begin{aligned} \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i &= -\partial_i p + f_i + \nu \partial_j \partial_j u_i \\ \partial_i u_i &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por  $u_k(x + r, t) = u'_k$  e tomando a média no espaço amostral<sup>‡</sup>, vem:

$$E \{u'_k \partial_t u_i\} + E \{u'_k u_j \partial_j u_i\} = -E \{u'_k \partial_i p\} + E \{u'_k f_i\} + \nu E \{u'_k \partial_j \partial_j u_i\}$$

<sup>‡</sup>Note que a correlação entre velocidade e pressão é nula, já que é imposta a condição de isotropia e incompressibilidade.

$$E \{u_i \partial_t u'_k\} + E \{u_i u'_j \partial'_j u'_k\} = -E \{u_i \partial'_k p'\} + E \{u_i f'_k\} + \nu E \{u_i \partial'_j \partial'_j u'_k\}.$$

Somando as equações acima, e lembrando que para processos estacionários a covariância depende somente da diferença dos argumentos, a saber  $r$ ,  $\partial_i = -\partial_{r_i} = -\partial'_i$  e os operadores envolvidos comutam com a média, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t E \{u_i u'_k\} + \frac{1}{2} \partial_{r_j} [E \{u_i u'_j u'_k\} - E \{u'_k u_j u_i\}] \\ = E \{u_i f'_i\} + \nu \partial_{r_j} \partial_{r_j} E \{u_i u'_k\}, \end{aligned}$$

podendo também ser escrita sob a forma de:

$$\frac{1}{2} \partial_t R_{ik} - \frac{1}{2} \partial_{r_j} [T_{jki} + T_{ijk}] = S_{ik} + \nu \partial_{r_j} R_{ik}, \quad (3.11)$$

onde  $S_{ik} = E \{u_i f'_i\}$ .

A equação (3.11) é chamada de Relação de Kármán-Howarth (**RKH**). Tomando  $r = 0$  na **RKH**, esta transforma-se em uma equação para a variação de energia do fluxo médio. O primeiro termo do lado direito diz que a força injeta energia diretamente no fluxo médio; o segundo termo, que a única forma de dissipação é através da viscosidade. É interessante chamar a atenção para o fato da **RKH** não ser um sistema fechado, já que para conhecermos a correlação de segunda ordem devemos conhecer a de terceira ordem.

### 3.2.1 Análise do Caso Isotrópico

A hipótese de isotropia<sup>§</sup> traz uma grande simplificação na obtenção do espectro da covariância, que passa a ser equivalente a do espectro unidimensional, e também um ganho no entendimento do mecanismo da turbulência.

Reescrevendo as correlações na forma de (3.5) e (3.10), e lembrando que no caso isotrópico  $R_{ik}$  e  $T_{ijk}$  têm que ser invariantes sob reflexão, os termos  $C, T_5, T_6$  devem ser nulos. Pela incompressibilidade do fluxo vem:

$$\partial_{r_k} R_{ik} = \partial_{r_i} R_{ik} = 0 \quad (3.12)$$

$$\partial_{r_k} T_{ijk} = 0.$$

---

<sup>§</sup>Nesta secção, exigimos que o termo de força fosse escrito como o gradiente de uma função, e portanto, incorporado à pressão e posteriormente eliminado da RKH, via homogeneidade e isotropia.

Reescevendo as funções de Kármán como:

$$\begin{aligned} A &= \frac{f-g}{r^2}; B = g \\ T_1 &= \frac{k-h-2q}{r^3}; T_4 = \frac{h}{r}; T_2 = T_3 = \frac{q}{r}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

teremos por (3.12) e (3.13) que:

$$\begin{aligned} g &= f + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} f \\ 0 &= \frac{r_i r_j}{|r|^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (k-h) + \frac{2}{r} (k-h-2q) \right] + \frac{2\delta_{ij}}{r} \left[ h+q + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} h \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) em (3.5) e (3.10) vem:

$$\begin{aligned} R_{ik}(r) &= \delta_{ik} f(r^2) + \frac{1}{2} \left[ \delta_{ik} - \frac{r_i r_k}{|r|} \right] \frac{\partial}{\partial r} f(r^2) \\ T_{ijk}(r) &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{r_i r_j r_k}{|r|^3} \left( \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) + \delta_{ij} \frac{r_k}{|r|} - (\delta_{jk} r_i + \delta_{ik} r_j) \left( \frac{1}{|r|} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] k(r^2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Definindo as transformadas de Fourier unidimensionais por:

$$\begin{aligned} E \{u \cdot u\} f(r, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikr) F(k, t) \\ F(k, t) &= \frac{E\{u \cdot u\}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr \exp(-ikr) f(r, t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} E \{u \cdot u\} g(r, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikr) G(k, t) \\ G(k, t) &= \frac{E\{u \cdot u\}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr \exp(-ikr) g(r, t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

substituindo em (3.14) vem:

$$G = \frac{1}{2} \left[ F - k \frac{\partial}{\partial k} F \right], \quad (3.18)$$

levando-nos à seguinte representação tridimensional da correlação:

$$\begin{aligned} R_{ij}(r, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk^3 \exp(ik \cdot r) \Phi_{ij}(k, t) \\ \Phi_{ij}(k, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dr^3 \exp(-ik \cdot r) R_{ij}(r, t), \end{aligned}$$

onde, obviamente,  $R_{ii}(r, t) = R_{ii}(-r, t)$ . Definindo  $E(k, t) = 2\pi k^2 \Phi_{ii}(k, t)$ , podemos escrever a soma das componentes diagonais da correlação como:

$$R_{ii}(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk E(k, t) \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad (3.19)$$

igualando (3.15) e (3.19) obtemos:

$$k \frac{\partial}{\partial k} [F + 2G] = -2E. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.18) na expressão acima vem:

$$\begin{aligned} E(k, t) &= \mathcal{D}_3 F(k, t) \\ \mathcal{D}_3 &\equiv \frac{1}{2} \left( k^2 \frac{\partial^2}{\partial k^2} - k \frac{\partial}{\partial k} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

A equação acima nos diz que, dado o espectro da função de correlação de segunda ordem unidimensional, podemos obter o espectro tridimensional da correlação de segunda ordem. Analogamente, por (3.15), podemos expressar a correlação de terceira ordem, por meio da função de correlação unidimensional<sup>¶</sup>  $k = \frac{E\{u'_1(u_1)^2\}}{[E\{u \cdot u\}]^{3/2}}$ . Importante frisar que esta possibilidade existe em virtude da incompressibilidade do fluxo, que nos permitiu escrever (3.12).

### 3.2.2 Transformada de Fourier da RKH

Olhemos para a RKH, desta vez no espaço de Fourier, para entender por intermédio de quais mecanismos a turbulência pode ser gerada, mantida e amortecida. A (3.11) para a direção paralela aos pontos em questão é:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\|u\|^2 f) + 2 \|u\|^{2/3} \left( \frac{\partial}{\partial r} h + 4 \frac{h}{r} \right) = 2\nu \|u\|^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} f + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} f \right), \quad (3.22)$$

lembrando que:  $f \propto (u_1 u'_1)$  e  $h \propto (u_2^2 u'_1)$ . Substituindo (3.16) vem:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial t} F + 4k^2 H_1 - 8 \int_{k_0}^k s H_1(s) ds = -2\nu k^2 F + 4 \int_{k_0}^k s F(s) ds \quad (3.23)$$

$$H_1(k) = \frac{\|u\|^{2/3}}{k\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{ikr} dr. \quad (3.24)$$

Por (3.21) obtemos uma equação para o espectro da energia, aplicando o operador  $\mathcal{D}_3$  em (3.23).

$$\frac{\partial}{\partial t} E = -W - 2\nu k^2 E \quad (3.25)$$

$$W = 4k^2 \mathcal{D}_3 [H_1(k)]. \quad (3.26)$$

---

<sup>¶</sup>Estas funções também são chamadas de *funções de Kármán-Howarth* ou *correlações de Kármán-Howarth*.

A equação (3.25) nos diz que a perda de energia dos turbilhões de escala  $1/k$  é causado pela dissipação direta  $2\nu k^2 E$  e pela transferência de uma escala para outra  $W$ . Como  $W$  é essencialmente a transformada de Fourier da correlação tripla, esta é a responsável pelo transporte de energia de uma escala para outra, sendo a correlação tripla herança do termo não linear da equação. Este fato corrobora o modelo fenomenológico de Prandtl, onde o mecanismo responsável pelo transporte de energia é a colisão dos turbilhões.

Nos modelos fenomenológicos [6, 7, 24, 25, 51] a função  $W$  é modelada com o intuito de ajustar os resultados experimentais. Mas, como estes modelos assumem independência estatística entre os turbilhões da região energética e da região dissipativa, o que é uma aproximação grosseira; e não levam em consideração que os turbilhões são bem localizados tanto espacialmente como temporalmente; não são capazes de prover um entendimento da dinâmica da turbulência, muito embora, dêem resultados satisfatórios na região inercial.

### 3.3 Leis Experimentais e Escalas em Turbulência

O objetivo desta secção é identificar escalas de movimento nos fluidos e comentar brevemente as leis experimentais da turbulência.

Consideremos um fluxo com uma dimensão característica  $L$ , velocidade  $U$  e viscosidade cinemática  $\nu$ . Geralmente tomamos  $U$  como a raiz quadrada da média espacial e amostral e  $L$  como sendo  $1/k_0$ , onde  $k_0$  é ponto de máximo global da transformada de Fourier da covariância da velocidade a dois pontos. Neste caso,  $L$  é chamado de *escala energética*<sup>||</sup>, pois os turbilhões que contribuem com uma parcela maior, geralmente, estão nessa vizinhança. Chamamos de *tempo característico de advecção*<sup>\*\*</sup> a

$$t_a = \frac{L}{U}, \quad (3.27)$$

pois este dá a ordem de grandeza do tempo gasto por um turbilhão para percorrer

---

<sup>||</sup>Esta é uma tradução totalmente livre do termo: *energy-containing scale* corrente na literatura em língua inglesa.

<sup>\*\*</sup>Há aqui um abuso de linguagem pois o termo *advecção* refere-se ao movimento de um escalar passivo sobre fluido, caso este não considerado na definição.



uma distância  $L$  no fluxo. Definimos também *tempo de difusão*

$$t_d = \frac{L^2}{\nu}, \quad (3.28)$$

que nos dá a escala de tempo dos processos de difusão viscosa no fluido.

A existência destes tempos característicos nos sugere a interpretação do Número de Reynolds como uma razão entre eles.

$$Re = \frac{t_d}{t_a}. \quad (3.29)$$

Como  $Re$  é o parâmetro que controla a turbulência, fica patente que a concorrência entre a difusão, advecção e força é o que gera a turbulência, pois a difusão tende a diminuir o valor dos expoentes de Liapunov do fluxo, enquanto que o termo advectivo acopla os modos normais e a força compensa a perda, fazendo com que o sistema não tenda para um ponto fixo. O que qualitativamente concorda com a análise feita para EDO com órbitas homoclínicas[45], onde a intersecção entre as variedades instáveis e estáveis, em uma configuração tipo ferradura de Smale, é o mecanismo gerador de caos.

De um ponto de vista mais físico, esperaríamos que os fenômenos difusivos fossem de pequena importância para a análise dinâmica da turbulência. Todavia, o termo viscoso é responsável pela dissipação de energia cinética do fluido em forma de calor, fenômeno este que é predominante nos turbilhões de menor escala. Mas, como veremos mais adiante neste capítulo, a concorrência entre estes dois fenômenos (advecção e difusão) gera três escalas de movimento, a saber : energética, inercial e dissipativa, sendo os fenômenos mais interessantes, turbulência e intermitência, estão ligados a escala inercial, ou seja, a escala de transição entre a energética e a dissipativa. Logo, o entendimento da turbulência é a explicação da existência destas escalas.

### 3.3.1 Escalas em Turbulência

É uma constatação visual que em um fluxo podemos identificar estruturas de diversos tamanhos, por exemplo, nos fenômenos atmosféricos somos capazes de distinguir tornados, pequenos redemoinhos, deslocamentos de centros de baixa pressão. Isto

é possível porque porções do fluxo compartilham propriedades dinâmicas iguais ou muito parecidas e, de alguma forma, diferente das propriedades da vizinhança (fenômeno este ligado ao aumento abrupto do gradiente do campo de velocidade). Uma primeira aproximação é definir *turbilhão* ou *redemoinho* como qualquer região do fluxo, cuja velocidade não varia apreciavelmente. Mas agora defrontamo-nos com o problema de quantificar este *apreciavelmente*. Podemos utilizar a transformada de Fourier para esta análise.

Se  $u(x, t)$  é um campo de velocidade e  $\tilde{u}(k, t)$  sua transformada de Fourier definimos como *Turbilhão de escala menor que  $l = 1/k$*  a função

$$u^{\leq}(x, t, k) = \int_{|s| \leq k} \tilde{u}(s, t) e^{is \cdot x} d^3 s. \quad (3.30)$$

Definimos, também, *Turbilhão de escala  $l = 1/k$*  a função

$$u(x, t, k) = \int_{|s|=k} \tilde{u}(s, t) e^{is \cdot x} ds^3. \quad (3.31)$$

Definimos *escala longitudinal integral* ou simplesmente *escala integral* por

$$L_i(t) = \frac{\int_0^\infty R_{11}(r, 0, 0, t) dr}{R_{11}(0, 0, 0, t)} = \int_0^\infty f(r) dr. \quad (3.32)$$

É fácil ver, pela definição e pelo comportamento de  $f$ , que o valor da escala integral é determinado principalmente pela região energética do espectro.

Definimos como *região dissipativa*, a região do espectro dos pequenos turbilhões, ou seja, dos turbilhões que são responsáveis pela dissipação da energia do fluxo em forma de calor. Dentro desta visão, podemos, ainda, diferenciar duas regiões: primeiro uma grande região, chamada de *região estacionária*, definida como o conjunto de todos os turbilhões, cuja energia  $E(k, t)$  tem dependência temporal fraca ou nula. Esta região, geralmente, abarca a região dissipativa e a chamada *região inercial*, que é a parte da região estacionária na qual a dissipação é pequena, ou seja, é dominada pelas forças inerciais (termo não-linear da NS). Esta divisão tem origem em algumas leis experimentais e são amplamente utilizadas em modelos fenomenológicos ou semi-fenomenológicos [51].

### 3.3.2 Leis Experimentais

**Lei 1 (Lei dos Dois-Terços)** *Em um fluxo turbulento, com número de Reynolds muito alto, a média amostral do quadrado do incremento da velocidade entre dois pontos*

$$E \left\{ [u_i(x+r) - u_i(x)]^2 \right\} \quad (3.33)$$

*é proporcional a  $r^{2/3}$ .*

Observemos que se um processo estacionário ou de incrementos estacionários é tal que a transformada de Fourier da média espectral do quadrado do incremento é uma potência  $k^{-n}$ ,  $1 < n < 3$ , então, a média do quadrado do incremento é proporcional a  $r^{n-1}$ . Ou seja, se  $F_{ii}$  é a transformada de Fourier da correlação do processo  $u$ , vem:

$$E \{ u_i(x+r) u_i(x) \} = \int e^{ikr} F_{ii}(k) dk. \quad (3.34)$$

Então,

$$E \left\{ [u_i(x+r) - u_i(x)]^2 \right\} = 2 \int (1 - e^{ikr}) F_{ii}(k) dk. \quad (3.35)$$

Fazendo  $F_{ii} = C |k|^{-n}$ ,  $C > 0$  observamos que (3.34) diverge para qualquer valor de  $n$ , portanto processos estocásticos de segunda ordem não podem ter espectro em lei de potência. Não obstante, considerando somente processos de incrementos estacionários, nos quais vale (3.35), observamos que para  $1 < n < 3$  não há divergência.

$$E \left\{ [u_i(x+r) - u_i(x)]^2 \right\} = \tilde{C} r^{n-1} \quad (3.36)$$

$$\tilde{C} = 2C \int (1 - e^{ix}) |x|^{-n} dx. \quad (3.37)$$

Portanto, nos casos em que vale a Lei dos Dois-terços no espaço físico, vale também no espaço das frequências a Lei dos Cinco-Terços, que vem a ser a mesma coisa.

A região de  $r$  que respeita a Lei dos Dois-Terços<sup>††</sup> é denominada de *região inercial*. Encontramos esta região no centro do espectro, ocupando, geralmente, três ordens de grandeza, sendo seguida, à direita (número de onda maior), pela região de dissipação, e à esquerda (número de onda menor), pela região energética.

---

<sup>††</sup>Em [2, 18] há uma série de exemplos experimentais e, particularmente em [18], uma simulação.

**Lei 2 (Lei da Dissipação finita de Energia)** *Se, em um experimento sobre um fluxo turbulento, todos os parâmetros de controle são mantidos constantes, exceto a viscosidade, que poderá ser diminuída tanto quanto possível, a dissipação de energia por unidade de massa tem um comportamento consistente com a existência de um limite finito e positivo.*

Diferentes experimentos e simulações foram feitos para verificação desta lei[18, 39], sendo que a dispersão estatística varia entre 20-40%, dependendo da geometria e do número de Reynolds em que foram realizados.

Portando, devemos encarar esta lei com cautela, já que não existe nenhum resultado conhecido que obrigue a sua existência. Todavia, podemos escrever a dissipação do fluxo como

$$\langle \varepsilon \rangle = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk. \quad (3.38)$$

Como a região dissipativa do espectro é a principal responsável pelo valor de  $\langle \varepsilon \rangle$ , a forma detalhada de  $E(k, t)$  na região dos grandes turbilhões não influencia significativamente a integral acima. Isto implica que a transferência de energia ocorre predominantemente entre modos vizinhos, como nos mostra o modelo *DIA* de Kraichnan[51], e também que a região dissipativa é estatisticamente independente da região energética. Portanto, o mecanismo de transfêrencia de energia é tal que os pequenos turbilhões perdem toda a informação sobre as condições iniciais, gerando uma região cujas propriedades são independentes das condições iniciais e, além do mais estacionárias. Este tipo de argumentação nos leva diretamente ao modelo do Kolmogorov.

### 3.4 As Hipóteses de Kolmogorov e suas implicações

Na teoria de Kolmogorov consideramos um campo de velocidades incompressível, tal que seus incrementos sejam homogêneos, isotrópicos, e tenham segunda derivada contínua. Esta definição tem um aspecto generalizador, pois não exige que o campo de velocidades tenha sua secção espacial estacionária. O incremento do campo, contando também sua dependência temporal, deve ter incrementos estacionários.

Por outro lado, a inserção da parte temporal do campo na definição não permite que este varie livremente no tempo.

### 3.4.1 Descrição via Incrementos

Seja a transformação de coordenadas

$$y = x' - x - u(x, t) [t' - t] \quad (3.39)$$

e o incremento do campo das velocidades

$$w_i(y) = u_i(x + y) - u_i(x) \quad (3.40)$$

pela homogeneidade, vem:

$$E \{w_i(y)\} = 0. \quad (3.41)$$

Definimos um tensor de rank 2, simétrico que nos dê a parte simétrica da correlação do incremento por:

$$B_{ij}(y, y') = \frac{1}{2} E \{w_i(y)w_j(y') + w_i(y')w_j(y)\}, \quad (3.42)$$

que pode ser reescrita como:

$$B_{ij}(y, y') = \frac{1}{2} \{B_{ij}(y, y') + B_{ij}(y', y') - B_{ij}(y - y', y - y')\}. \quad (3.43)$$

Pelos mesmos argumentos utilizados para a forma da covariância, no caso do campo de velocidades ser homogêneo e isotrópico, vem:

$$E \{(w_i w_j)(y)\} = \frac{y_i y_j}{y^2} [B_{dd}(y) - B_{nn}(y)] + \delta_{ij} B_{nn}(y) \quad (3.44)$$

$$B_{kk}(y) = E \{[u_k(y + x) - u_k(x)]^2\}, \quad k = n, d. \quad (3.45)$$

onde o índice **d** denota a direção radial e o índice **n** a direção normal entre os pontos considerados. Pela homogeneidade e isotropia podemos reescrever, sem perda de generalidade:

$$B_{kk}(y) = E \{\omega_k(y, 0, 0)^2\}. \quad (3.46)$$

Podemos também escrever a correlação tripla

$$B_{ijk}(a, b, c) = E \{\omega_i(a)\omega_j(b)\omega_k(c)\} \quad (3.47)$$

$$B_{ddd}(y) = E \{[u_d(x + y) - u_d(x)]^3\}. \quad (3.48)$$

É fácil ver, pela construção dos  $B$ 's, que suas relações com as funções de Kármán-Howarth são dadas pelas fórmulas abaixo:

$$B_{dd}(r) = 2[1 - f(r)] E \{u_d^2\} \quad (3.49)$$

$$B_{nn}(r) = 2[1 - g(r)] E \{u_n^2\} \quad (3.50)$$

$$B_{dd}(r) = 6k(r)E \{u_d^2\}^{3/2}. \quad (3.51)$$

Se  $u(x, t)$  descreve um fluido, então existem suas derivadas de primeira e segunda ordem, pois a equação de Navier-Stokes é de segunda ordem. Por conseguinte, existem as derivadas até terceira ordem da covariância, donde ressaltam as seguintes propriedades:

$$B_{kk}(0) = 0 \quad (3.52)$$

$$\partial_r B_{kk}(0) = 0 \quad (3.53)$$

$$\partial_r^2 B_{dd}(0) = 2E \{[\partial_1 \omega_1(y, 0, 0)]^2\} = 2a^2 \quad (3.54)$$

$$\partial_r^2 B_{nn}(0) = 2E \{[\partial_1 \omega_2(y, 0, 0)]^2\} = 2b^2, \quad (3.55)$$

mas, pela incompressibilidade, vem que  $b^2 = 2a^2$ .

### 3.4.2 As Hipóteses de Similaridade de Kolmogorov

**Hipótese 1 (Primeira Hipótese de Similaridade)** *Para uma turbulência homogênea e isotrópica, as distribuições finitas  $F_n$  dos incrementos da velocidade são unicamente determinadas pelas quantidades:  $\nu$  viscosidade e  $\text{por} \langle \varepsilon \rangle$  dissipação média por unidade de massa.*

Se a família  $F_n$  depende somente de  $\nu$  e  $\langle \varepsilon \rangle$ , então as correlações irão depender somente delas também. Todavia, as correlações dependem da distância  $r$ . Portanto, deve existir  $\eta$ , chamado de *comprimento de Kolmogorov*, com dimensão de distância, formado por  $\nu$  e  $\langle \varepsilon \rangle$ , tal que:  $B_{kk}(r) = \beta_{kk}(r/\eta) \bar{u}^2$ ,  $k = d, n$ , onde  $\beta_{kk}$  é uma função universal e  $\bar{u}$  é uma constante com dimensão de velocidade que só pode depender de  $\nu$  e  $\langle \varepsilon \rangle$ . Fazendo uma análise dimensional simples, chegamos a:

$$\eta = [\nu^3 / \langle \varepsilon \rangle]^{1/4} \quad (3.56)$$

$$\bar{u} = [\nu \langle \varepsilon \rangle]^{1/4}. \quad (3.57)$$

A turbulência é isotrópica, logo  $B_{kk}(r) = B_{kk}(-r)$ , e por (3.4.1) a função é par. Retendo o primeiro termo da expansão em série de potência e utilizando novamente (3.4.1):

$$\beta_{kk}(r/\eta) \cong \left(\frac{r}{\eta}\right)^2, k = d, n \quad (3.58)$$

$$B_{dd}(r) \cong \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\nu} r^2 \quad (3.59)$$

$$B_{dd}(r) \cong 2 \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\nu} r^2. \quad (3.60)$$

**Hipótese 2 (Segunda Hipótese de Similaridade)** *Para uma turbulência homogênea e isotrópica, quando  $|y|, |y'|, |y - y'| \gg \eta$ , as distribuições finitas do incremento da velocidade são unicamente determinadas por  $\langle \varepsilon \rangle$ .*

Tomando  $r$  suficientemente grande, as funções universais  $\beta_{kk}$  e  $\beta_{ddd}$  devem ter uma forma tal, que as funções de correlação  $B_{kk}$ ,  $B_{ddd}$  não apresentem dependência em  $\nu$ . Portanto, pela Primeira Hipótese de Similaridade e pela (3.4.2), teremos:

$$\beta_{kk} \cong C \left(\frac{r}{\eta}\right)^{2/3}. \quad (3.61)$$

Utilizando (3.4.1) e fazendo um procedimento análogo para a correlação tripla:

$$B_{dd} \cong C (\langle \varepsilon \rangle r)^{2/3} \quad (3.62)$$

$$B_{nn} \cong \frac{4}{3} C (\langle \varepsilon \rangle r)^{2/3} \quad (3.63)$$

$$B_{ddd} \cong \tilde{C} \langle \varepsilon \rangle r, \quad (3.64)$$

onde  $C, \tilde{C}$  são constantes adimensionais a serem determinadas.

### 3.4.3 As Hipóteses de Kolmogorov e a Relação de Kármán-Howarth

Substituindo (3.4.1) em (3.22), obtemos a **RKH** para as correlações escalares de Kolmogorov.

$$3 \frac{\partial}{\partial t} [2 \|u\|^2 - B_{dd}] + \left( \frac{\partial}{\partial r} B_{ddd} + 4 \frac{B_{ddd}}{r} \right) = 6\nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{dd} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} B_{dd} \right), \quad (3.65)$$

lembrando que a turbulência é estacionária e  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|^2$ , reescrevemos a equação acima como:

$$4 \langle \varepsilon \rangle = \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right] \left( 6\nu \frac{\partial}{\partial r} B_{dd} - B_{ddd} \right), \quad (3.66)$$

integrando e usando as condições iniciais vem:

$$\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle r = 6\nu \frac{\partial}{\partial r} B_{dd} - B_{ddd}. \quad (3.67)$$

Observemos que, se tomarmos  $r$  da ordem do comprimento de Kolmogorov, esperamos que  $B_{ddd} \approx r^3$  e por (3.67) temos que  $\frac{\partial}{\partial r} B_{dd}|_{r=0} \approx \frac{2\langle \varepsilon \rangle}{15\nu} r$ , ou seja  $B_{dd} \cong \frac{\langle \varepsilon \rangle}{15\nu} r^2$ . Tomando  $r$  muito maior que o comprimento de Kolmogorov, esperamos pelas Hipóteses de Similaridade, i.e. (3.4.2), que  $\frac{\partial}{\partial r} B_{dd} \ll B_{ddd}$ , portanto  $B_{ddd} = \frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle r$ .

### 3.5 Objeções à Universalidade de Kolmogorov

Landau foi o primeiro que suspeitou da universalidade das constantes, baseado no seguinte argumento:

Suponhamos, a princípio, que o valor instantâneo de  $[\omega_d(r)]^2$  seja expresso como uma função universal da dissipação  $\varepsilon(t)$ . Quando tomarmos a média desta expressão, a variação de  $\varepsilon$  sobre tempos da ordem do período dos turbilhões grandes (tempo característico de advecção) influencia o valor da média. Todavia, esta variação é diferente para cada fluxo, pois a região energética é permanente e caracterizada pelas condições de contorno do problema. Logo, o resultado não pode ser universal.

Este argumento também é utilizado por Kraichnan[36], só que de uma maneira mais detalhada e quantitativa. Cujas linhas mestras são:

A variação temporal de  $\varepsilon(t)$  é determinada pela convecção da escala dissipativa, pelas escalas maiores (pertencentes à região inercial) e por suas distorções internas, sendo que a própria convecção pode causar distorções. E por seu turno, as distorções internas e o período de convecção são características de cada fluxo, assim as constantes para as correlações não têm um caráter universal. Então, se  $\varepsilon$  independe dos detalhes do fluxo, a região inercial deve ser estatisticamente independente da escala de dissipação. Ou seja, o mecanismo de transferência de energia dos turbilhões deve apagar detalhes das informações [24] contidas nos turbilhões maiores e ter um caráter local.

Todavia, Kraichnan mostrou que, se considerarmos inicialmente a escala dissipativa estatisticamente independente da região inercial e deixarmos que a única forma



de interação entre elas seja o termo não-linear estas escalas passarão a ser estatisticamente dependentes e a ter momentos dependentes do tempo para instantes diferentes.

Para ilustrarmos os parágrafos anteriores, calculemos o exemplo de Kraichnan :

**Exemplo 3.1 (Kraichnan)** *Tomemos um campo de velocidade  $u + v$  tal que:  $v$  seja constante no espaço e no tempo; tenha uma distribuição gaussiana e isotrópica;  $u$  seja variável no espaço, muito menor que  $v$ , e em  $t = 0$  tenha distribuição gaussiana, homogênea, isotrópica e independente de  $v$ . Escrevendo a equação de Navier-Stokes sem o termo viscoso, como o termo viscoso é responsável pela dissipação e o fenômeno em questão é a interação, este somente atrapalharia. Assim, cada componente de Fourier da velocidade obedecerá à seguinte equação:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(k, t) &= i(k \cdot v)u(k, t) \\ u(k, t) &= u(k, 0)e^{-i(k \cdot v)t}.\end{aligned}\tag{3.68}$$

*Calculando a correlação temporal*

$$\begin{aligned}T(k; t, s) &= \frac{E \{u(k, t)u^*(k, s)\}}{[E \{u(k, s)u^*(k, s)\} E \{u(k, t)u^*(k, t)\}]^{1/2}} \\ &= E \{e^{-iv \cdot k(t-s)}\} = e^{-\frac{1}{2}v_0^2 k^2 (t-s)^2},\end{aligned}$$

onde  $v_0$  é a variância de  $v$ . Mas, por hipótese,  $u$  e  $v$  são independentes no instante inicial, logo os valores simultâneos dos dois campos são estatisticamente independentes em qualquer instante posterior. Decorre de (3.68) que

$$E \{v_i u_j(k, t) u_m^*(k, s)\} = -iv_0^2 k_i (t-s) e^{-\frac{1}{2}v_0^2 k^2 (t-s)^2} E \{u_j(k, 0) u_m^*(k, 0)\} \tag{3.69}$$

Poderíamos generalizar o resultado acima e mostrar que momentos mais gerais somente se anulam para tempos iguais, tal qual o exemplo acima.

### 3.6 Observações

Muito embora a Lei dos Dois-Terços se aplique a uma grande variedade de fluxos, como nos mostrou Kolmogorov, esta não parece estar completamente de acordo com os resultados experimentais[18], já que estes parecem indicar a existência de termos de correção, ou seja,  $B_{nn} \sim r^{2/3+\zeta}$ . Mas ainda não temos dados, com precisão suficiente, para saber se  $\zeta$  é causado pela inaplicabilidade das Hipótese de Kolmogorov ou pelas técnicas intrusivas utilizadas na maior parte dos experimentos[39].

Poderíamos pensar em realizar simulações para termos comprovações, mas para este fim seria necessário um tempo de máquina impensável.

Existem, hoje, evidências da existência de estruturas coerentes[10, 28] nas soluções da equação de Navier-Stokes, como veremos mais adiante para o caso da equação de Burgers, estas estruturas são responsáveis pelas deformações da distribuição de probabilidade. Assim,  $\zeta$  pode ser o resultado da existência destas estruturas na região inercial. Contudo, a quantificação desta influência não é trivial devido a interação entre turbilhões de diversos tamanhos. Mas as simulações vêm avançando muito nos últimos anos, e no futuro próximo teremos uma resposta final<sup>‡‡</sup> para esta questão secular.

---

<sup>‡‡</sup>Começará, no próximo ano, um esforço conjunto entre o Observatoire de la Côte D’Azur(Prof. Frisch) e o Laboratório de Los Alamos(Prof. Kraichnan) para executar uma simulação cuja malha será da ordem de  $2048^3 \sim 10^{11}$  pontos.

## Capítulo 4

### Formulação Funcional

A análise da Turbulência via funcionais, mais precisamente, por meio do funcional característico da distribuição de probabilidade do campo de velocidades, começou a ser aventado por Kolmogorov. Todavia, sua primeira formulação sistemática deve-se a Hopf[29, 30], que introduziu uma equação integro-diferencial para o funcional característico. Mas esta abordagem é incompleta, pois somente os momentos espaciais, ou seja, momentos calculados no mesmo instante de tempo, são passíveis de serem calculados. Lewis e Kraichnan[41] generalizaram a abordagem de Hopf de tal forma que os momentos espaço-temporais podem ser calculados. Como o processo dedutivo das duas formulações é análogo, utilizaremos como base o artigo de Lewis e Kraichnan. Cabe ressaltar aqui que, embora a equação de Hopf não nos forneça uma descrição completa do fenômeno estatístico, ela está em melhor posição para ser comparada com os resultados canônicos do modelo de Kolmogorov já que, quando tomamos o limite de tempos iguais para os momentos espaço-temporais, estes tendem, forçosamente, para zero se a separação espacial permanece finita.

#### 4.1 Funcional Característico

Definimos o valor médio de um funcional  $F$  sobre o espaço de soluções da equação de Navier-Stokes para uma determinada condição de contorno, como:

$$\langle F \rangle = \int dP(u) F(u), \quad (4.1)$$

onde  $P(u)$  é a medida de probabilidade neste espaço\*.

Agora seja  $y = (y_1, y_2, y_3) = y(x, t)$  um campo real arbitrário, que se anula no infinito espacial, em particular, podemos tomar  $y$  como tendo suporte compacto. Definimos um funcional de  $y$ , que é Funcional Característico de  $P$ , como sendo:

$$F[y] = \left\langle \exp i \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x y_i(x, t) u_i(x, t) \right\} \right\rangle = \langle e^{i(y, u)} \rangle. \quad (4.2)$$

Calculando a  $n$ -ésima derivada funcional parcial de  $F$  para  $y = 0$  teremos a seguinte igualdade:

$$i^{-n} \frac{\delta^n F[y]}{\delta y_{\alpha_1}(x_1, t_1) \dots \delta y_{\alpha_n}(x_n, t_n)} \Big|_{y=0} = \langle u_{\alpha_1}(x_1, t_1) \dots u_{\alpha_n}(x_n, t_n) \rangle. \quad (4.3)$$

Por outro lado, caso desejemos obter a função característica da densidade de probabilidade a  $n$ -pontos basta tomarmos

$$y_i(x, t) = \sum_{j=1}^n h_{i(j)} \delta_{i\alpha_j} \delta(t - t_j) \delta^3(x - x_j), \quad (4.4)$$

onde em  $h_{i(j)}$ , o primeiro índice indica a componente do campo e o segundo o ponto referido. Substituindo na definição do Funcional Característico temos

$$F[y] = \left\langle \exp i \left\{ \sum_{j=1}^n h_{\alpha_j(j)} u_{\alpha_j}(x_j, t_j) \right\} \right\rangle = \tilde{p}(h_{(1)}, \dots, h_{(n)}), \quad (4.5)$$

logo, a densidade de probabilidade é

$$p\{u_{\alpha_1}(x_1, t_1), \dots, u_{\alpha_n}(x_n, t_n)\} = \quad (4.6)$$

$$(2\pi)^{-n} \int dh_{(1)} \dots dh_{(n)} \tilde{p}(h_{(1)}, \dots, h_{(n)}) \exp\left\{-i \sum_{j=1}^n u_{\alpha_j} h_{(j)}\right\}. \quad (4.7)$$

## 4.2 Equação Para o Funcional Característico

Para obtermos uma equação diferencial para  $F$ , basta observarmos que

$$\frac{\delta F[y]}{\delta y_{\alpha}(x_1, t_1)} = i \langle u_{\alpha}(x_1, t_1) e^{i(y, u)} \rangle \quad (4.8)$$

---

\*Observe que este funcional é essencialmente diferente do encontrado em Mecânica Quântica, onde as integrais para as probabilidades de transição podem ser em alguns casos discretizadas e depois tomado o limite do contínuo e assim calculadas diretamente.

$$\frac{\delta^n F[y]}{\delta y_\alpha(x_1, t_1) \delta y_\beta(x_2, t_2)} = - \left\langle e^{i(y, u)} u_\alpha(x_1, t_1) u_\beta(x_2, t_2) \right\rangle \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta F[y]}{\delta y_\alpha(x, t)} = i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha(x, t) e^{i(y, u)} \right\rangle \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta^n F[y]}{\delta y_\alpha(x, t) \delta y_\beta(x, t)} = - \left\langle e^{i(y, u)} u_\beta(x, t) \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha(x, t) \right\rangle. \quad (4.11)$$

Para obtermos a última equação, utilizamos a condição de incompressibilidade. Assim, também teremos

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[y]}{\delta y_\alpha(x, t)} = i \left\langle e^{i(y, u)} \frac{\partial}{\partial t} u_\alpha(x, t) \right\rangle. \quad (4.12)$$

Substituindo, no lado direito da equação (4.12), a equação de Navier-Stokes com uma força determinística e utilizando as relações acima vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[y]}{\delta y_\alpha(x, t)} - i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta^2 F[y]}{\delta y_\alpha(x, t) \delta y_\beta(x, t)} = \\ \nu \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta F[y]}{\delta y_\alpha(x, t)} + i f_\alpha F[y] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Pi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde  $\Pi = i \langle p(x, t) e^{i(y, u)} \rangle$ . Para eliminarmos o campo de pressão, ao invés de recorrermos à utilização de operadores não locais, preferimos introduzir um campo de teste  $l(x, t) = (l_1, l_2, l_3)$ , tal que este se anule suficientemente rápido no infinito espacial e seja solenoidal. Fazendo uma integração por partes vem :

$$\int d^3x l_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi \right) = - \int d^3x \Pi \left( \frac{\partial}{\partial x_i} l_i \right) = 0. \quad (4.14)$$

Assim, integrando o campo  $l$  conjuntamente com a equação para  $F$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int dt d^3x l_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[y]}{\delta y_\alpha(x, t)} - i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta^2 F[y]}{\delta y_\alpha(x, t) \delta y_\beta(x, t)} \right] = \\ \int dt d^3x l_\alpha \left[ \nu \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta F[y]}{\delta y_\alpha(x, t)} + i f_\alpha F[y] \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Lembrando que esta equação precisa ser satisfeita para qualquer campo de teste solenoidal e pode ser tomada como substituta da equação de Navier-Stokes, com a condição inicial reescrita como:

$$F_0[y] = \left\langle \exp \left\{ i \int d^3x y_i(x, 0) u_i(x, 0) \right\} \right\rangle. \quad (4.16)$$

A condição de incompressibilidade pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\delta F[y]}{\delta y_\alpha(x, t)} = 0, \quad (4.17)$$

que é uma consequência direta da definição de  $F$ . Cabe lembrar também que  $F$  tem que ser normalizado e a probabilidade deve ser não negativa, implicando as seguintes relações

$$F[0] = 1 \quad F^*[y] = F[-y] \quad F[y] \leq 1 \quad (4.18)$$

$$\left\langle \left| \sum_{j=1}^n z_j e^{i(y_j, u)} \right|^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i^* z_j F[y_j - y_i] \geq 0. \quad (4.19)$$

Esta última propriedade é chamada de definição positiva do funcional. Podemos estabelecer, também, uma equação para o funcional característico utilizando a transformada de Fourier dos campos determinísticos, ou seja, efetuando as seguintes transformações:

$$z_i(k, t) = \int d^3x y_i(x, t) e^{-ik_j x_j} \quad (4.20)$$

$$y_i(x, t) = (2\pi)^{-3} \int d^3k z_i(k, t) e^{ik_j x_j} \quad (4.21)$$

$$m_i(k, t) = \int d^3x l_i(x, t) e^{-ik_j x_j} \quad (4.22)$$

$$l_i(x, t) = (2\pi)^{-3} \int d^3k m_i(k, t) e^{ik_j x_j} \quad (4.23)$$

$$g_i(k, t) = (2\pi)^{-3} \int d^3x f_i(x, t) e^{ik_j x_j} \quad (4.24)$$

$$f_i(x, t) = \int d^3k g_i(k, t) e^{-ik_j x_j}. \quad (4.25)$$

Como  $y$  e  $f$  são reais, segue da transformação de Fourier que

$$z_i^*(k, t) = z_i(-k, t) \quad e \quad g_i^*(k, t) = g_i(-k, t), \quad (4.26)$$

donde vem, também, que a incompressibilidade de  $l_i$  fica representada por

$$k_i m_i = 0. \quad (4.27)$$

Esta transformação no espaço das funções implica que

$$\frac{\delta F[y]}{\delta y_\alpha(x, t)} = \int d^3k \frac{\delta F[z]}{\delta z_\beta(k, t)} \frac{\delta z_\beta(k, t)}{\delta y_\alpha(x, t)} = \int d^3k \frac{\delta F[z]}{\delta z_\beta(k, t)} e^{-ik_j x_j}. \quad (4.28)$$

Portanto, para a  $n$ -ésima derivada teremos

$$\frac{\delta^n F[y]}{\delta y_{\alpha_1}(x_1, t_1) \dots \delta y_{\alpha_n}(x_n, t_n)} = \quad (4.29)$$

$$\int d^3k_1 \dots d^3k_n \frac{\delta^n F[z]}{\delta z_{\alpha_1}(z_1, t_1) \dots \delta z_{\alpha_n}(z_n, t_n)} \exp \left\{ -i \left[ x_{1j} k_{1j} + \dots + x_{nj} k_{nj} \right] \right\}. \quad (4.30)$$

Substituindo na (4.15) vem<sup>†</sup>:

$$\int dt d^3k m_i(k, t) \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + vk^2 \right] \frac{\delta F[z]}{\delta z_i(k, t)} - iF[z] \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] g_j(k, t) \right\} = \quad (4.31)$$

$$\int dt d^3k_1 d^3k_2 m_i(k_1 + k_2, t) [k_{1j} + k_{2j}] \frac{\delta^2 F[z]}{\delta z_i(k_1, t) \delta z_j(k_2, t)}.$$

A equação acima nos sugere que podemos generalizar nossa abordagem um pouco mais tratando a força como sendo um processo estocástico.

Suponhamos que no instante inicial a velocidade e a força, sejam estatisticamente independentes e dados. Logo, ao invés do funcional  $F[y]$ , consideraremos um novo funcional que descreva a probabilidade conjunta da força e da velocidade. Assim, definimos

$$F[y, q] \equiv \int dP(u, f) \exp i \left\{ \int dt d^3x (y_i u_i + q_i f_i) \right\}. \quad (4.32)$$

Agora, se tomamos

$$y_i(x, t) = \delta(t - 0) r_i(x) \quad (4.33)$$

$$q_i(x, t) = \delta(t - 0) s_i(x). \quad (4.34)$$

substituindo na definição de  $F$  e utilizando a condição de independência, vem:

$$F[y, q] = \left\langle \exp i \int d^3x [r_i(x) u_i(x, 0) + s_i(x) f_i(x, 0)] \right\rangle =$$

$$\left[ \int dP(u) \exp i \int d^3x r_i(x) u_i(x, 0) \right] \times \left[ \int dP(f) \exp i \int d^3x s_i(x) f_i(x, 0) \right]$$

$$= \chi[r] \Psi[s],$$

---

<sup>†</sup>Para obtermos esta equação, utilizamos o operador de projeção  $\left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right]$  para ressaltarmos que o campo de velocidades responde somente à parte solenoidal da força.

onde  $\chi[r]$  e  $\Psi[s]$  são respectivamente os funcionais característicos para a velocidade e para a força no instante inicial.

Fica fácil ver que a modificação que incide sobre a (3.13) é simplesmente

$$if_\alpha F[y, q] \rightarrow \frac{\delta F[y, q]}{\delta q_\alpha(x, t)}, \quad (4.35)$$

levando-nos a reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} \int dt d^3x l_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[y, q]}{\delta y_\alpha(x, t)} - i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta^2 F[y, q]}{\delta y_\alpha(x, t) \delta y_\beta(x, t)} \right] = \\ \int dt d^3x l_\alpha \left[ \nu \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta F[y, q]}{\delta y_\alpha(x, t)} + \frac{\delta F[y, q]}{\delta q_\alpha(x, t)} \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

sendo que a condição de incompressibilidade não muda formalmente.

### 4.3 Solução para Número de Reynolds Nulo

Observar o comportamento da equação para o número de Reynolds nulo significa que estamos olhando para uma equação onde os efeitos de transporte de energia entre os turbilhões são desprezíveis, ou seja, toda a energia recebida da força externa é dissipada através do termo viscoso. Em outras palavras, esperamos que esta solução descreva o comportamento da região dissipativa do espectro.

Começemos pelo caso mais simples em que a força externa é determinística. Obviamente o termo que deve ser eliminado é o termo na segunda derivada funcional de  $F$ , que na representação espectral é o termo essencialmente não local. Portanto, a equação toma a seguinte forma:

$$\int dt d^3k m_i(k, t) \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + vk^2 \right] \frac{\delta F[z]}{\delta z_i(k, t)} - iF[z] \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] g_j(k, t) \right\} = 0. \quad (4.37)$$

Como a integral acima deve ser nula para todo campo  $m$ , necessariamente a expressão entre parênteses deve ser nula, ou seja,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + vk^2 \right] \frac{\delta F[z]}{\delta z_i(k, t)} - iF[z] \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] g_j(k, t) = 0. \quad (4.38)$$

Suponhamos que o termo de força seja nulo. Logo, a equação fica reduzida a

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + vk^2 \right] \frac{\delta F[z]}{\delta z_i(k, t)} = 0. \quad (4.39)$$



Como a equação acima não tem derivadas funcionais em  $z$ , devemos ter:

$$\frac{\delta F[z]}{\delta z_i(k, t)} = R_i[z] e^{-vk^2 t}. \quad (4.40)$$

Como neste ponto o funcional  $R_i[z]$  é arbitrário, tomemos  $R_i[z] = z_i(k, t)$ . Mas, por ser  $F$  um funcional característico de fluxo incompressível, devemos ter:

$$k_i z_i = 0. \quad (4.41)$$

Agora, como queremos tomar  $z$  como um campo arbitrário, basta inserirmos o operador de projeção solenoidal diante do campo  $z$  na nossa solução. E para descrevermos uma condição inicial arbitrária, já que  $R_i[z]$  deve ser essencialmente a derivada funcional do funcional que é solução, escrevemos a solução como:

$$F[z] = A \left[ \int dt e^{-vk^2 t} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] z_j(k, t) \right]. \quad (4.42)$$

Para resolver (4.38), podemos tentar multiplicar o funcional, que já sabemos ser solução da equação não forçada, por um funcional que ao ser derivado cancele o termo forçado. Ou seja, tentemos substituir

$$F = A \left\{ \int dt e^{-vk^2 t} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] z_j(k, t) \right\} \exp \left[ i \int dt d^3 k h_j z_j \right], \quad (4.43)$$

na equação forçada, levando a seguinte equação:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + vk^2 \right] h_i(k, t) = \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] g_j(k, t), \quad (4.44)$$

equação que tem como solução

$$h_i(k, t) = e^{-\nu k^2 t} \int_0^t d\tau e^{\nu k^2 \tau} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] g_j(k, \tau). \quad (4.45)$$

Consideremos, neste momento, o caso em que a força é aleatória e o número de Reynolds nulo. A (4.36) fica

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[y, q]}{\delta y_\alpha(x, t)} - \nu \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta F[y, q]}{\delta y_\alpha(x, t)} = \frac{\delta F[y, q]}{\delta q_\alpha(x, t)}. \quad (4.46)$$

Transformando para a representação espectral, onde

$$g_i(k, t) = (2\pi)^{-3} \int d^3 x q_i(x, t) e^{ik_j x_j}, \quad (4.47)$$

teremos

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + vk^2 \right] \frac{\delta F[y, q]}{\delta z_\alpha(k, t)} = \left[ \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] \frac{\delta F[y, q]}{\delta g_\beta(k, t)}. \quad (4.48)$$

Por analogia com (4.43) e lembrando que a condição inicial é que o campo de força seja estatisticamente independente do campo de velocidade, teremos como solução

$$F = \chi \left\{ \int dt e^{-vk^2 t} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] z_j(k, t) \right\} \times \quad (4.49)$$

$$\times \Psi \left\{ \int dt e^{-vk^2 t} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] z_j(k, t) + g(k, t) \right\}. \quad (4.50)$$

#### 4.4 Abordagens Ingênuas de Solução

Possuímos uma equação diferencial para o funcional característico que, à primeira vista, nos parece muito aprazível, pois partimos de uma equação não-linear e inhomogênea e chegamos a uma equação linear e homogênea(4.36).

Todavia, não existe um método geral para resolver equações funcionais integro-diferenciais, nem tampouco teoremas de existência e unicidade das soluções para o caso geral<sup>‡</sup>. Outra dificuldade é que equações deste tipo não são de fácil implementação computacional.

Portanto, nesta secção, tentaremos mostrar algumas abordagens já realizadas e onde aparecem as suas dificuldades.

Reescrevendo a equação para o funcional característico como

$$\left( l, \frac{\partial}{\partial t} D_y F[y, q] - i \nabla D_y D_y F[y, q] \right) = \quad (4.51)$$

$$(l, \nu \Delta D_y F[y, q] + D_q F[y, q]),$$

onde  $(a, b) = \int dt d^3x a_i b_i$  é o produto interno do espaço das soluções da equação de Navier-Stokes,  $D_y = \frac{\delta}{\delta y(x, t)}$  e  $D_q = \frac{\delta}{\delta q(x, t)}$  são “gradientes funcionais” em relação aos campos  $y(x, t)$  e  $q(x, t)$ , respectivamente, sendo que os outros símbolos têm seu significado usual.

---

<sup>‡</sup>Recentemente tem havido um grande esforço no estudo de equações diferenciais funcionais em espaços de Banach. Mas nenhum resultado significativo é de nosso conhecimento(*vide: Approximation Methods in Banach Spaces, Measure Theory in Infinite Dimension Spaces MIA, Kluwer*).

Em uma primeira vista, poderíamos pensar em expandir  $F$  como uma série de funcionais *à la Taylor*, ou seja,

$$F[y, q] = F^{(0,0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F^{(n,m)}, \quad (4.52)$$

onde

$$F^{(n,m)} = \int dt_1 d^3x_1 \dots \int dt_n d^3x_n \int dt_{n+1} d^3x_{n+1} \dots \int dt_{n+m} d^3x_{n+m} \times \quad (4.53)$$

$$\frac{\delta^{n+m} F[0, 0]}{\delta y_{\alpha_1}(x_1, t_1) \dots \delta y_{\alpha_n}(x_n, t_n) \delta q_{\alpha_{n+1}}(x_{n+1}, t_{n+1}) \dots \delta q_{\alpha_{n+m}}(x_{n+m}, t_{n+m})} \times \quad (4.54)$$

$$\times y_{\alpha_1}(x_1, t_1) \dots y_{\alpha_n}(x_n, t_n) \times q_{\alpha_{n+1}}(x_{n+1}, t_{n+1}) \dots q_{\alpha_{n+m}}(x_{n+m}, t_{n+m}). \quad (4.55)$$

Assim, é evidente que

$$F^{(0,0)} = F[0, 0] = 1. \quad (4.56)$$

Mas desta forma, ganhamos o problema de convergência da série, já que os momentos não necessariamente se anulam quando, pelo menos dois pontos estão separados por uma distância infinita.

Se, por exemplo, ignoramos o termo de força de (4.51), fazemos  $l = y$ , utilizamos a expansão proposta em (4.52) e agrupamos os polinômios de mesma ordem em  $y$ , obtemos

$$\left( y, \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right] D_y F^{(n)} \right) = \left( y, i \nabla D_y D_y F^{(n+1)} \right), \quad (4.57)$$

que é exatamente a equação para o momento da  $n$ -ésima ordem, sendo que este, como já havíamos visto, envolve o cálculo do momento de ordem subsequente.

Portanto, a única vantagem, neste caso, é estética, já que deixa a equação de uma forma mais compacta. O problema de convergência da série pode ser contornado, utilizando uma expansão no logaritmo de  $F$ , ou seja, uma expansão nos cumulantes, garantindo assim, a convergência das integrais, mas obviamente não resolvendo o problema de fechamento.

Poderíamos tentar utilizar uma expansão do tipo Gram-Charlier<sup>§</sup>, ou seja,

$$F = e^{F^{(1)}+F^{(2)}} \left[ 1 + \sum_{n=3}^{\infty} F^{(n)} \right]. \quad (4.58)$$

Mas esta também nos leva a equações que precisam de fechamento, muito embora a determinação destes  $F^{(n)}$  seja equivalente à determinação de um número infinito de momentos.

Neste ponto, poderíamos aventar a possibilidade de truncar a expansão em uma ordem específica, para conseguirmos uma primeira aproximação do problema. Mas,

$$|F| = \left| 1 + \sum_{n=1}^k F^{(n)} + \sum_{n=k+1}^{\infty} F^{(n)} \right| \leq 1 \Rightarrow \quad (4.59)$$

$$\Rightarrow |F| < \left| 1 + \sum_{n=1}^k F^{(n)} \right| + \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} F^{(n)} \right|. \quad (4.60)$$

Se supusermos que  $\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} F^{(n)} \right| = 0$ , então, existirá pelo menos um  $y$ , a saber  $y = 0$ , tal que  $\left| 1 + \sum_{n=1}^k F^{(n)} \right| > 1$ . Logo, a série truncada não pode ser Funcional Característico de nenhum processo estocástico. Ou seja, só é válida a expansão de Taylor com resto, não nos fornecendo, portanto, um método de aproximações sucessivas.

Em outras palavras, mesmo que não saibamos exatamente todos os momentos, cumulantes ou desvios gaussianos(dependendo da expansão utilizada), temos que ter uma estimativa para eles, se quisermos utilizar este método. Contudo, estimativas normalmente virão de uma hipótese ou modelo, e não diretamente da equação para o funcional.

Poderíamos, ainda, tentar fazer uma expansão da solução com base no número de Reynolds mas este procedimento é desaconselhado pelos seguintes aspectos: (1) estamos interessados em Turbulência Desenvolvida, logo devemos tomar o limite quando o número de Reynolds vai para o infinito. Este fato obriga-nos a fazer ressonas de séries perturbativas, cuja convergência não é bem estabelecida, podendo

---

<sup>§</sup>A conveniência desta expansão advém do seguinte fato: se ignoramos os termos da segunda derivada funcional, ou seja, Número de Reynolds nulo, e de força, a solução será estacionária, o que significa que, se tivermos um campo gaussiano, este permanecerá como tal para todo tempo posterior[41].

levar-nos a resultados errados em caso de convergência[17]; (2) a invariância por transformação aleatória de Galileu é quebrada para qualquer aproximação, pois a expansão é feita sobre o termo não linear da equação, sendo que a invariância é conseguida através da anulação do mesmo com o termo de derivada temporal; (3) todos os resultados conseguidos por métodos diagramáticos foram conseguidos também por métodos mais simples.

Mesmo com estas dificuldades, alguns físicos vêm utilizando métodos diagramáticos com um relativo sucesso( ver[43] e suas referências), muito embora nos pareça improvável que este método consiga obter resultados que não foram obtidos por outras técnicas menos abstratas.

## Capítulo 5

### A Equação de Burgers

Neste capítulo trataremos da equação de Burgers unidimensional, que é uma redução para uma dimensão da equação de Navier-Stokes, sem o termo de pressão. Esta equação, embora introduzida por J.M. Burgers[5] como um modelo para o estudo da turbulência, não apresenta caos, mesmo na versão forçada. Por outro lado, ela surge naturalmente em estado sólido no estudo de polímeros diretos e crescimento de superfície, neste caso sendo mais conhecida como equação **KPZ**[32].

O interesse neste modelo simples advém do fato de ser integrável(via transformação de Hopf-Cole[31]) e termos muitas informações sobre as propriedades das soluções, no caso determinístico[3, 15, 17, 55] e uma formulação matemática precisa para o caso estocástico [19]. Isso faz com que este modelo seja um laboratório ideal para o teste de técnicas que posteriormente devem ser aplicadas à equação de Navier-Stokes.

Este capítulo tentará dar uma visão panorâmica sobre a equação determinística, e mostrar os principais resultados conhecidos para o caso aleatório.

#### 5.1 A Equação Determinística

A equação de Burgers é

$$\frac{\partial}{\partial t}u = -u\frac{\partial}{\partial x}u + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \quad (5.1)$$

também podendo ser escrita na forma dita conservativa

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{2}(u)^2 + \nu\frac{\partial}{\partial x}u \right], \quad (5.2)$$

quando adquire uma forma mais palatável, se introduzimos a transformação de Hopf-Cole,

$$u = -\frac{\partial}{\partial x}\psi, \quad \psi = 2\nu \ln w, \quad (5.3)$$

levando-nos, a menos de uma fase arbitrária no tempo, à equação de calor

$$\frac{\partial}{\partial t}w = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}w. \quad (5.4)$$

Se tomarmos como domínio toda a reta real e tempos estritamente positivos, a solução é

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4\nu t}} \int e^{-\frac{(x-a)^2}{4\nu t}} w_0(a) da. \quad (5.5)$$

Escrevendo a condição inicial como

$$w_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} w(x, t), = e^{f(x)} \quad (5.6)$$

vem, da transformação de Hopf-Cole, que

$$u_0(x) = -2\nu \frac{d}{dx}f \quad (5.7)$$

$$u(x, t) = \frac{\int d\xi \frac{x-\xi}{t} e^{-\frac{1}{2\nu} \left[ \frac{(x-\xi)^2}{2t} + \int_0^\xi d\zeta u_0(\zeta) \right]}}{\int d\xi e^{-\frac{1}{2\nu} \left[ \frac{(x-\xi)^2}{2t} + \int_0^\xi d\zeta u_0(\zeta) \right]}}. \quad (5.8)$$

Importante observar que, para esta solução existir, devemos necessariamente ter

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\xi d\zeta u_0(\zeta)}{\xi^2} = 0. \quad (5.9)$$

## 5.2 Aproximação Heurística

Para viscosidade nula, a equação de Burgers, dada a existência do Teorema de Hopf[49], pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}(u) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.10)$$

ou seja, as partículas lagrangeanas conservam suas velocidades. Assim, a solução desta equação pode ser escrita como:

$$u(X(a, t), t) = u_0(a) \quad (5.11)$$

$$X(a, t) = a + t u_0(a), \quad (5.12)$$

onde utilizamos letras maiúsculas para coordenadas eulerianas, i.e.  $u(X(a, t), t)$  e letras minúsculas latinas para coordenadas lagrangeanas, i.e.  $a$ . Todavia, esta é uma solução implícita da equação de Burgers, chamada de lagrangeana, que permanece única, inversível e regular, até o instante que o jacobiano da transformação euler-lagrangeana permanece inversível, ou seja, até que

$$J(a, t) = \frac{\partial}{\partial a} X(a, t) = 1 + t \dot{u}_0(a) \quad (5.13)$$

seja positivo. O instante em que isto acontece é denotado por  $t_*$ , e o chamaremos de *tempo de pré-choque*, sendo definido por:

$$t_* = \frac{1}{-\min_a [\dot{u}_0(a)]}. \quad (5.14)$$

Notemos que no caso em que  $u_0(a) = ca$   $c > 0$ , o tempo de pré-choque é negativo, ou seja, se no instante inicial não existe nenhuma partícula no fluido capaz de ultrapassar a sua vizinha, o fluxo permanecerá sempre numa fase regular (onde todo o fluxo forma um único choque). Isto pode ser melhor visto se substituirmos esta solução na equação para a coordenada euleriana, i.e.  $X(a, t) = (1 + tc)a$ . Como soluções não decrescentes, no conjunto das soluções da equação de Burgers, são raras, não precisamos concentrar nossa atenção sobre este caso. Concentraremos nossa atenção no conjunto de soluções cujos gradientes sejam não constantemente positivos.

Seja  $a_*$  a posição lagrangeana tal que  $t_* = 1/[-u_0(a_*)]$ , portanto a derivada espacial da velocidade euleriana em um instante  $t$ , e no ponto  $X_*(a_*, t)$  será

$$\frac{\partial}{\partial X} u = \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial X} = \dot{u}_0(a_*) \frac{1}{1 - \frac{t}{t_*}}, \quad (5.15)$$

que é infinito no tempo de pré-choque. Por isso, chamamos esta singularidade em  $a_*$  de pré-choque. Fazendo uma expansão de Taylor ao redor do pré-choque, tomando  $u_0(a_*) = 0, a_* = 0$ , condição esta que pode ser conseguida por transformação de coordenadas e transformação de Galileu, vem:

$$u_0(a) = -\frac{1}{t_*}a + \frac{b}{6}a^3 + O(a^4). \quad (5.16)$$



Como o gradiente da velocidade é mínimo global em  $a_*$ , devemos ter a segunda derivada nula e a terceira positiva, ou seja  $b > 0$ . A expansão para a posição euleriana fica

$$X(a, t) = \left(1 - \frac{t}{t_*}\right) a + \frac{tb}{6} a^3 + O(a^4). \quad (5.17)$$

Se desejamos inverter esta transformação, teremos dois comportamentos diferentes na vizinhança do pré-choque, dependendo do tempo, ou seja,

$$a(X, t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_*}\right)} X + O(X^3), \quad t < t_* \quad (5.18)$$

$$a(X, t_*) = \left(\frac{6}{bt_*} X\right)^{1/3} + O(x^{2/3}), \quad t = t_*, \quad (5.19)$$

implicando, para a velocidade, na seguinte expansão:

$$u(X, t) = -\frac{1}{(t_* - t)} X + O(X^3), \quad t < t_* \quad (5.20)$$

$$u(X, t) = -\frac{1}{t_*} \left(\frac{6}{bt_*} X\right)^{1/3} + O(x^{2/3}), \quad t = t_*. \quad (5.21)$$

Assim, podemos visualizar o pré-choque como uma mudança local de um comportamento linear decrescente,  $t < t_*$ , para um comportamento tipo raiz cúbica,  $t = t_*$ , com tangente vertical.

Podemos ainda analisar o comportamento da entropia que é definida como:

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right]^2 dx = \int \left[ \dot{u}_0 \frac{1}{1 + t\dot{u}_0} \right]^2 (1 + t\dot{u}_0) da, \quad (5.22)$$

obtendo

$$\Omega(t) = \propto (t_* - t)^{-1/2}, \quad t \uparrow t_* \quad (5.23)$$

$$\Omega(t) = \propto \int_{\varepsilon \downarrow 0}^{\infty} |x|^{-4/3}, \quad t = t_*. \quad (5.24)$$

Estando o pré-choque caracterizado, vejamos como ele se forma. Para tal, consideremos que o campo inicial é analítico, tal que possamos fazer a extensão da solução implícita ao domínio complexo, denotando  $U(Z, t)$  a velocidade euleriana complexa,  $A$  a coordenada lagrangeana. Assim, se a aplicação complexa

$$Z = A + tU_0(A) \quad (5.25)$$

deixa de ser inversível em um ponto  $A_*(t)$ , cuja imagem pela aplicação é  $Z_*(t)$ , então a expansão em torno deste ponto será

$$Z = \propto Z_*(t) + (A - A_*(t))^2 \quad (5.26)$$

$$\left| \frac{\partial Z}{\partial A} \right| = \propto |A - A_*(t)| \propto \sqrt{|Z - Z_*(t)|} \quad (5.27)$$

e, portanto, o comportamento local do gradiente da velocidade será

$$\left| \frac{\partial U}{\partial Z} \right| = \left| \frac{\partial U}{\partial A} \right| / \left| \frac{\partial Z}{\partial A} \right| \propto 1/\sqrt{|Z - Z_*(t)|} \quad (5.28)$$

$$U - U_* = \propto \sqrt{|Z - Z_*(t)|}, \quad (5.29)$$

ou seja, a existência de singularidades complexas no campo inicial que se aproximam da reta real, conforme  $t$  se aproxima de  $t_*$ , dá origem aos pré-choques.

Para entendermos globalmente a solução, comecemos por reescrever (5.8) como:

$$u(x, t) = \frac{\int da \frac{x-a}{t} e^{-\frac{1}{2\nu}\phi(x, t, a)}}{\int da e^{-\frac{1}{2\nu}\phi(x, t, a)}}, \quad (5.30)$$

onde

$$\phi(x, t, a) = \left[ \frac{(x-a)^2}{2t} + \int_0^a ad\tilde{a}u_0(\tilde{a}) \right]. \quad (5.31)$$

Em uma solução para  $\nu$  tendendo a zero, os únicos pontos  $a$  que contribuem para (5.30), para  $x, t$  fixos, são os pontos nos quais  $\phi(x, t, a)$  atinge um mínimo global. Ou, de uma maneira mais formal, definimos

$$\psi(x, t) = \min_a \phi(x, t, a), \quad (5.32)$$

que pode ser reescrita como

$$\psi(x, t) = \frac{x^2}{2t} + L_t(a(x, t)), \quad (5.33)$$

onde

$$L_t(a(x, t)) = \min_a \left\{ \omega(x, a) - \frac{xa}{t} \right\}, \quad (5.34)$$

$$\omega(a, t) = \int_0^a d\tilde{a} \left[ u_0(\tilde{a}) + \frac{\tilde{a}}{t} \right]. \quad (5.35)$$

Definimos uma função  $C_\omega(a)$ , chamada de *envelope convexo*, tal que goze da propriedade de ser a maior função convexa, tal que  $C_\omega \leq \omega$ , podendo ser descrita

geometricamente, por intermédio da seguinte construção: fixando  $x$  e  $t$ , construímos uma reta no plano  $(\omega, a)$ , que seja descrita pela equação  $\omega = \frac{x}{t}a + c$ . Para cada  $x$  podemos encontrar  $c_0(x, t) = c_0$  tal que, para todo  $c < c_0$  a reta  $\omega = \frac{x}{t}a + c$  não intercepte o gráfico de  $\omega$ , enquanto que para todo  $c > c_0$  a interceptação acontece. Mas para  $c = c_0$  a reta  $\omega = \frac{x}{t}a + c_0$  é tangente ao gráfico de  $\omega$ , em pelo menos um ponto. Portanto,  $\psi(x, t)$  é, em geral, um conjunto dos pontos  $a$ , onde a reta  $\omega = \frac{x}{t}a + c_0$  é tangente ao gráfico de  $\omega$ . Definimos, então,

$$a_-(x, t) = \min_a \{a; a \in \psi(x, t)\} \quad (5.36)$$

$$a_+(x, t) = \max_a \{a; a \in \psi(x, t)\}, \quad (5.37)$$

ou seja, estes são o menor e o maior valor da aplicação plurívua  $\psi(x, t)$ .

Finalmente, definimos o envelope convexo como:

$$C_\omega(a) = \begin{cases} \omega(a, t), & a_-(x, t) = a_+(x, t) \\ xa + c_0, & a_-(x, t) < a_+(x, t). \end{cases} \quad (5.38)$$

Consideremos, agora, sua derivada  $F_t(a) = \frac{d}{da}C_\omega(a)$ , que em geral será uma função não-decrescente, e sua inversa  $F_t^{-1}(x)$ , que geralmente não é uma aplicação bem definida em razão dos pontos  $x$ , para os quais existe um conjunto  $\{a; F_t(a) = x\}$ . Nos pontos em que  $F_t^{-1}(x)$  for descontínua, vale a pena considerar  $F_t^{-1}(x)$  como uma curva contínua sobre o plano, que tenha segmentos verticais para estes valores de  $x$ , já que posteriormente estaremos interessados em uma interpretação mais pictórica. Agora, podemos formular o seguinte teorema:

**Teorema 5.1 (Hopf)** *Sejam  $x, t$  tal que  $\psi(x, t)$  consista de um ponto  $a(x, t) = F_t^{-1}(x)$ . Então  $\lim_{v \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  existe e*

$$u(x, t) = \frac{x - F_t^{-1}(x)}{t}, \quad (5.39)$$

*se  $F^{-1}(x)$  é um intervalo de comprimento positivo, então existem os limites laterais*

$$u_-(x, t) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0^-} u_0(x + \tilde{x}) = \frac{x - a_-(x, t)}{t} \quad (5.40)$$

$$u_+(x, t) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0^+} u_0(x + \tilde{x}) = \frac{x - a_+(x, t)}{t}. \quad (5.41)$$

Ao invés de fazermos a demonstração matemática deste teorema, vamos dar uma visão mais "física" dele.

Como  $a(x, t)$  é a coordenada da partícula, onde  $\phi(x, t, a)$  atinge um mínimo global para um dado  $(x, t)$ , é fácil ver que  $a(x, t)$  é a coordenada lagrangeana da qual emana a partícula do fluido, que estará na coordenada  $(x, t)$  euleriana.

Assim, podemos interpretar o resultado de Hopf e os resultados heurísticos da seguinte forma: o choque entre partículas lagrangeanas do fluxo, originadas da variação espacial da velocidade, gera a coalescência entre estas partículas, refletindo-se na perda de inversibilidade da transformação de coordenadas eulerianas para lagrangeanas, formação dos pré-choques(fig: 5.2), implicando, dessa forma, na perda de continuidade do campo nestes pontos, sendo que estes pontos de descontinuidade são chamados de choques(fig: 5.1)\*. Assim, o perfil de velocidades do campo euleriano é tipo serrote, sendo esta fase chamada de fase dissipativa. Como ilustração, consideremos o caso abaixo.

Suponha agora, que a solução  $u(x, t)$  apresente somente um choque, localizado em  $X(t)$ , e que

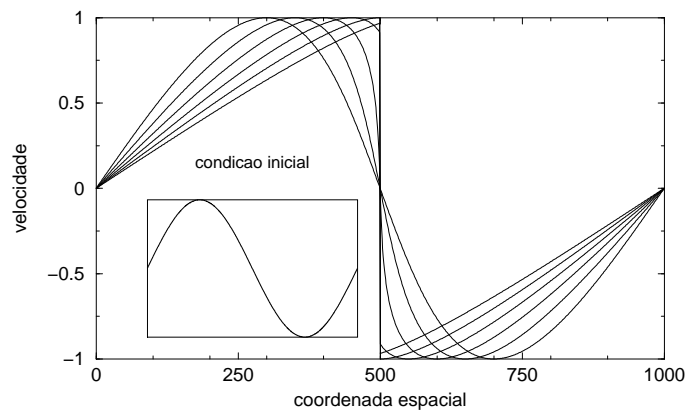


Figura 5.1: Formação do choque para condição inicial periódica.

---

\* estas figuras têm um carácter apenas ilustrativo, já que dispomos de resultados analíticos.

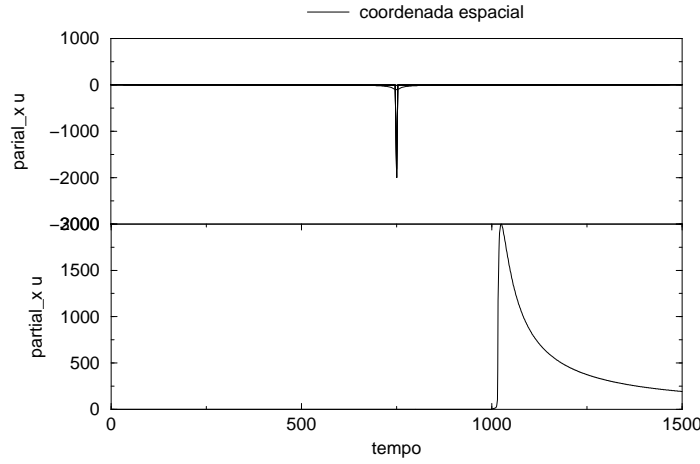


Figura 5.2: Derivada espacial do campo de velocidade para condição inicial periódica.

$$\lim_{x \rightarrow X(t)^\pm} u(x, t) = u_\pm, \quad (5.42)$$

onde  $u_\pm$  é o valor da descontinuidade. Pela conservação do momento total, vem:

$$0 = \frac{d}{dt} \int dx u(x, t) = \int_{-\infty}^{X(t)} dx \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{X(t)}^{\infty} dx \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX(t)}{dt} (u_- - u_+) \Leftrightarrow \quad (5.43)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{X(t)} dx \frac{\partial}{\partial x} u^2(x, t) + \frac{1}{2} \int_{X(t)}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} u^2(x, t) = \frac{dX(t)}{dt} (u_- - u_+) \Leftrightarrow \quad (5.44)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{2} (u_- + u_+), \quad (5.45)$$

dando-nos a equação para o movimento do choque (fig 5.3). Levando a cabo um procedimento similar para a conservação de energia, obtemos

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{12} (u_- + u_+)^3. \quad (5.46)$$

Mas, como no caso de viscosidade positiva tínhamos dissipação, por consistência, devemos ter no caso de viscosidade nula,  $u_- > u_+$ . Esta dissipação é interpretada pela absorção do choque  $X(t)$ , das partículas inicialmente dentro do intervalo lagrangeano  $[a_-, a_+]$ . Assim, uma vez absorvidas, estas partículas têm a mesma velocidade do choque. Agora, pela solução implícita, devemos ter  $u_0(a_\pm) = u_\pm$ . Portanto,

a posição euleriana de uma partícula, inicialmente em  $a$  está definida, sendo que chamaremos, doravante, a transformação de coordenadas euler-lagrangeanas correta de  $X_e(a, t)$  que, como vimos, é igual a  $X(a, t)$ , fora dos intervalos de choque, e igual a  $X(t)$ , no interior destes intervalos.

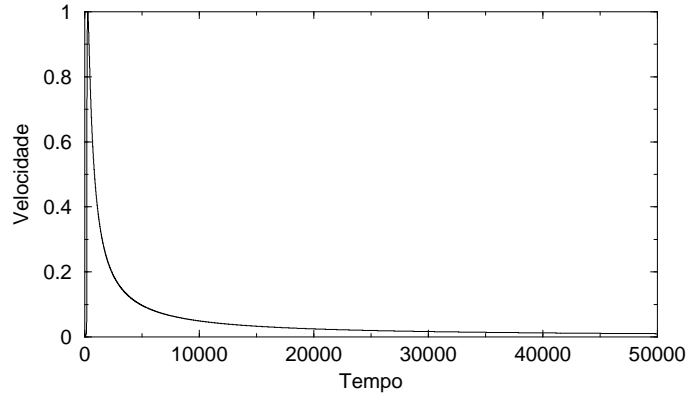


Figura 5.3: Decaimento da Solução

### 5.3 A Equação Estatística

Nesta secção, mais que nas anteriores, seguiremos os passos do artigo de Fournier e Frisch, já que este artigo é bastante intuitivo sem, contudo, lançar mão de idéias fenomenológicas espúrias.

Vamos supor um campo inicial homogêneo e ergódico, assim  $\langle u_0(a) \rangle = 0$ , e a covariância será

$$U(x - \tilde{x}, t) = \langle u(x, t) u(\tilde{x}, t) \rangle \quad (5.47)$$

e o espectro de energia que, é sua transformada de Fourier, será

$$E(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-ikx} U(x, t). \quad (5.48)$$

Consideremos a transformada de Fourier do campo de velocidade

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-ikx} u(x, t). \quad (5.49)$$

Logo, teremos

$$\langle \hat{u}(k, t) u(\tilde{k}, t) \rangle = \delta(k + \tilde{k}) E(k, t). \quad (5.50)$$

Podemos introduzir as chamadas RFL (Representações Fourier-Lagrangeanas) se escrevemos a transformada de Fourier do campo de velocidades, tomando  $x = X_e(a, t)$ .

Ou seja,

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int da e^{-ikX_e} u_0(a) \frac{\partial}{\partial a} X_e. \quad (5.51)$$

Agora, por integração por partes, vêm as três RFL

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}(k, t) u(\tilde{k}, t) \rangle &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int da d\tilde{a} \left\langle u_0(a) u_0(\tilde{a}) \frac{\partial}{\partial a} X_e \frac{\partial}{\partial \tilde{a}} \tilde{X}_e e^{-i(kX_e + \tilde{k}\tilde{X}_e)} \right\rangle \\ E(k, t) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{k} \right)^2 \int da e^{-ika} \langle \dot{u}_0(a) \dot{u}_0(a) e^{-ik[\xi(a, t) - \xi(0, t)]} \rangle \\ E(k, t) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{kt} \right)^2 \int da e^{-ika} [\mathcal{C}(t, k, a) - \mathcal{C}(t, k, 0)], \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde

$$\xi(a, t) = X_e(a, t) - a \quad (5.53)$$

é o deslocamento lagrangeano, e

$$\mathcal{C}(t, k, a) = \langle e^{-ik[\xi(a, t) - \xi(0, t)]} \rangle. \quad (5.54)$$

### 5.3.1 Condição Inicial Com Tempo de Pré-Choque Estatístico Positivo

Muito embora cada realização tenha um tempo de pré-choque, a existência de um limite inferior, num sentido estatístico, para o tempo de pré-choque no caso aleatório, depende da medida de probabilidade sobre o espaço de probabilidade considerado. Em outras palavras, depende da distribuição de probabilidade do gradiente da velocidade. Por exemplo, se o campo inicial for gaussiano, há uma probabilidade finita, mesmo para argumentos tendendo a menos infinito, assim sendo o tempo de pré-choque estatístico é  $T_* = 0$ .

Por outro lado, podemos tomar condições iniciais tais que  $P[\dot{u}(a) < -M] = 0$ , ou seja, o conjunto das realizações que apresenta  $t_*$  menores que  $1/M$  é nulo, de tal sorte que  $T_* = 1/M$ . Assim, podemos dizer que a distribuição é inferiormente limitada. Então, caracterizemos este caso.

Na fase regular ( $t < T_*$ ), podemos calcular a entropia pois,

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \int da \frac{\dot{u}^2(a)}{1 + t\dot{u}(a)} = \left\langle \frac{\dot{u}^2(a)}{1 + t\dot{u}(a)} \right\rangle, \quad (5.55)$$

onde utilizamos a hipótese de ergodicidade, denotando, para facilitar,  $\dot{u}^2(a) = w$ , já que a média não pode depender do ponto calculado, reescrevemos a igualdade acima como:

$$\Omega(t) = \int_{-1}^{\infty} dw P(w) \frac{w^2}{1 + tw}, \quad (5.56)$$

sendo que aqui estamos assumindo que,  $-M = T_* = 1$ .

Também assumimos que a medida de probabilidade do gradiente é absolutamente contínua em relação à Medida de Lebesgue, ou seja, o conjunto dos pontos de choque eulerianos tem medida de probabilidade nula. Hipótese que é válida, no nosso entendimento, somente para a fase regular e para tempos não muito próximos de  $T_*$ , pois se uma parte substancial das realizações tiver seu tempo de pré-choque próximo a  $T_*^\dagger$ , como no caso gaussiano[49], por exemplo (mais especificamente como o movimento browniano), o conjunto dos pontos regulares (fora do intervalo de choque) tem dimensão Hausdorff 1/2, fenômeno este vinculado ao "aumento" do número de choques. Assim, que se há um número grande de choques maduros num dado instante, obviamente a distribuição não pode ser absolutamente contínua à de Lebesgue, pois os choques trazem em si uma descontinuidade nos campos de velocidade e de seu gradiente. A única exceção seria se os choques se tornassem densos na reta e, portanto, restabelecêssemos a condição da medida de probabilidade ser absolutamente contínua com relação à Medida de Lebesgue, sendo o único detalhe que, em vez de termos a distribuição de probabilidade regular (fora do intervalo de choque), teríamos a probabilidade dos intervalos de choque.

Pela segunda RFL podemos escrever a entropia como:

$$\Omega(t) = \int_{-1}^{\infty} dk k^2 E(k, t). \quad (5.57)$$

Portanto, o comportamento crítico de  $\Omega$  é determinado pela forma da distribuição  $P(w)$ , na vizinhança do limite inferior da integral. Vamos supor que

$$P(w) \propto (w + 1)^\alpha. \quad (5.58)$$

---

<sup>†</sup>Ou seja, se  $P\left[\frac{1}{-\min_a \dot{u}(a)} < T_* + \varepsilon\right] = a + O(\varepsilon)$ , onde  $0 < \varepsilon < a < 1$ .



A condição de normalização nos diz que  $\alpha > 1$  e, observando o comportamento, ainda na fase regular, teremos

$$\begin{aligned} &cte, \quad \alpha > 0 \\ \Omega(t) &\approx -\ln(T_* - t), \quad \alpha = 0, \quad t \uparrow T_* \\ &(T_* - t)^\alpha, \quad -1 < \alpha < 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Portanto,  $\alpha$  regula a acumulação dos tempos de pré-choques das realizações, logo a não divergência para  $\alpha > 0$  significa, em um senso amplo, que a maior parte das realizações tem um tempo de pré-choque bem acima do tempo de pré-choque estatístico. Não obstante, a entropia é infinita para tempos posteriores a  $T_*$ . Seguindo um modelo simples, Fournier e Frisch (Apêndice B) obtiveram o seguinte comportamento para o espectro de energia:

$$E(k, t) \approx k^{-(3+2\alpha/3)} F_\alpha[k/K_1(t)], \quad k \rightarrow \infty \quad (5.60)$$

$$K_1(t) \approx (T_* - t)^{-\frac{3}{2}}, \quad t \uparrow T_* \quad (5.61)$$

onde  $F_\alpha$  é função positiva de decrescimento assintótico rápido, ou seja, nos instantes imediatamente anteriores ao tempo de pré-choque estatístico, o espectro assintótico ganha uma lei de potência, sendo que seu domínio aumenta quando  $t$  tende ao tempo de pré-choque estatístico. Isto nos leva a ver  $\alpha$  como um tempo adimensional que regula a fração de realizações, que tem seu tempo de pré-choque ao redor do tempo de pré-choque estatístico. Sendo  $\alpha = -1/2$  a condição de todas as realizações terem o mesmo tempo de de pré-choque, sendo que esta fração vai se diluindo à medida que  $\alpha$  aumenta, podemos observar, também, que esta lei de potência é mais forte do que a da fase dissipativa  $k^{-2}$ , como veremos a seguir.

A terceira RFL na fase dissipativa se escreve

$$E(k, t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi kt}} \right)^2 \int da \left\langle e^{-ik[X_e(a, t) - X_e(0, t)]} \right\rangle. \quad (5.62)$$

Lembrando que  $X_e$  é constante dentro dos intervalos de choque, podemos considerar somente a contribuição dos eventos, de forma que a origem e  $h$  estejam dentro do mesmo intervalo de choque pois, caso contrário, a exponencial oscilará muito

rapidamente, cancelando a contribuição, já que desejamos somente informações assintóticas. Portanto, podemos escrever em uma primeira aproximação

$$E(k, t) \approx I(t) k^{-2}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.63)$$

onde  $I(t)$  é essencialmente o comprimento médio dos intervalos de choque, que depende das condições iniciais.

### 5.3.2 Distribuição de probabilidade do gradiente da velocidade

A distribuição de probabilidade para o gradiente da velocidade pode ser escrito como:

$$p(x, \xi, t) = \left\langle \delta \left( \xi - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) \right\rangle. \quad (5.64)$$

Se tomamos o fluxo como homogêneo e ergódico, podemos reescrever a equação acima como:

$$p(\xi, t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx \delta \left( \xi - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right). \quad (5.65)$$

Também, podemos escrever esta expressão na versão lagrangeana, que é

$$p(\xi, t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L da \left| \frac{\partial X_e(a, t)}{\partial a} \right| \delta \left( \xi - \left( \frac{\partial X_e(a, t)}{\partial a} \right)^{-1} \dot{u}(a) \right). \quad (5.66)$$

Mas como no intervalo de choque  $\frac{\partial X_e(a, t)}{\partial a} = 0$ , podemos nos concentrar sobre o conjunto dos pontos regulares em um dado momento dentro do intervalo  $[-L, L]$ , denotado por  $R_L(t)$ , para o qual o envelope convexo é igual a função, logo podemos reescrever a expressão acima como:

$$p(\xi, t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{R_L(t)} da |1 + t\dot{u}(a)| \delta \left( \xi - \frac{\dot{u}(a)}{1 + t\dot{u}(a)} \right), \quad (5.67)$$

denotando por  $b_k(\xi) = b_k$  os números, de forma que:

$$\xi - \frac{\dot{u}(b_k)}{1 + t\dot{u}(b_k)} = 0. \quad (5.68)$$

Portanto, podemos escrever  $p(\xi, t)$  como:

$$p(\xi, t) = \frac{1}{|1 - t\xi|^3} \sum_k \frac{1}{|\ddot{u}(b_k)|} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{R_L(t)} da \delta(a - b_k). \quad (5.69)$$

Se desejamos estudar o comportamento assintótico  $\xi \rightarrow -\infty$ , é importante perceber que os pontos  $b_k$  estarão nas proximidades dos pré-choques  $a_k^*$ . Agora, fazendo uma expansão de (5.68) em torno do pré-choque mais próximo, vem:

$$(b_k - a_k^*)^2 \simeq -\frac{2}{tu_0^{(3)}(a_k^*)} \left[ 1 + \frac{1}{t\xi} - \frac{t}{t_j^*} \right], \quad (5.70)$$

onde  $t_j^* = -1/\dot{u}_0(a_k^*)$ . Logo, ou temos raízes duplas ou nenhuma raiz, denotadas por  $b_k^\pm$ . Considerando tempos anteriores ao tempo do  $k$ -ésimo pré-choque ( $t \leq t_j^*$ ), e a existência de raízes  $1 + \frac{1}{t\xi} - \frac{t}{t_j^*} \leq 0$ , podendo estas duas desigualdades serem unidas na forma

$$-\frac{1}{t} \leq \dot{u}_0(a_k^*) < \frac{-1}{t} - \frac{1}{t^2\xi}, \quad (5.71)$$

analogamente para  $t > t_j^*$ , vem:

$$\frac{-1}{t} - \frac{1}{2t^2\xi} < \dot{u}_0(a_k^*) < -\frac{1}{t}, \quad (5.72)$$

condições estas que podem ser resumidas em:

$$\frac{-1}{t} - \frac{1}{2t^2\xi} < \dot{u}_0(a_k^*) < \frac{-1}{t} - \frac{1}{t^2\xi}. \quad (5.73)$$

Seja agora  $I_L[a, t, \xi]$  a função indicador dos conjuntos de pontos que respeitam a desigualdade acima, dentro de  $R_L(t)$ . Expandindo,  $u_0^{(3)}(a_k^*)$  em torno do pré-choque, podemos escrever (5.69) como:

$$p(\xi, t) \simeq \frac{(2t)^{1/2}}{|t\xi|^3} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{R_L(t)} da \sum_k \frac{I_L[a, t, \xi]}{|u_0^{(3)}(a) \left[ 1 + \frac{1}{t\xi} + t\dot{u}_0(a) \right]|^{1/2}} \delta(a - a_k^*), \quad (5.74)$$

que pode ser reescrito como:

$$p(\xi, t) \simeq \frac{(2t)^{1/2}}{|t\xi|^3} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \left\{ \int_{-L}^L \frac{I_L[a, t, \xi] \times I_{R_L(t)}}{|u_0^{(3)}(a) \left[ 1 + \frac{1}{t\xi} + t\dot{u}_0(a) \right]|^{1/2}} \right\}. \quad (5.75)$$

Agora escrevemos esta expressão em termos da distribuição conjunta das três primeiras derivadas, tal que estejamos em um conjunto de pontos regulares sobre a reta  $p_3(\dot{u}, \ddot{u}, u^{(3)}, R_\infty(t))$ . Logo vem:

$$p(\xi, t) \simeq \frac{(2t)^{1/2}}{|t\xi|^3} \int_0^\infty du^{(3)} \int_{\frac{-1}{t} - \frac{1}{2t^2\xi}}^{\frac{-1}{t} - \frac{1}{t^2\xi}} d\dot{u} \frac{u^{(3)}}{p_3}(\dot{u}, 0, u^{(3)}, R_\infty(t)) \left[ 1 + \frac{1}{t\xi} + t\dot{u} \right]^{1/2}, \quad (5.76)$$

fazendo  $\dot{u} \simeq \frac{-1}{t}$ , vem:

$$p(\xi, t) \simeq J(t) |\xi|^{-7/2}, \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad (5.77)$$

sendo esta uma característica do fluxo válida para todos os tempos e independente das condições iniciais, ou seja, uma característica da equação de Burgers.

## 5.4 Observações

Como este capítulo nos mostrou, a existência de singularidades nas soluções é o fator preponderante na deformação da estatística inicial, no caso da equação de Burgers. O mesmo tipo de lei foi provado recentemente[4], para o caso com uma força impulsiva no tempo e suave no espaço, mostrando que a lei dos 7/2 é um traço dos pré-choques.

Para o caso com força do tipo ruído branco no tempo e suave no espaço, a controvérsia ainda perdura, embora E. *et al*[11, 12, 13] sustentem a existência de potência em 7/2 e Kraichnan[21], usando uma equação tipo Fokker-Plank, argumente em prol da potência em 3. Contudo, recentemente, o próprio Kraichnan[37] favorece a lei dos 7/2, mas sem obter qualquer resultado definitivo.

A dificuldade está em saber se os pré-choques estão presentes e separados, o que levaria à Lei dos 7/2, ou se existe alguma forma de agrupamento entre eles, o que levaria à uma potência em 3.

## Capítulo 6

### Conclusões

Este trabalho teve como objetivo descrever uma parte da pesquisa atual feita em turbulência. Obviamente, não foi possível entrar nos detalhes de todas as técnicas utilizadas mas acreditamos ter sido cumprida a proposta básica do projeto. Dada a generalidade da tese, podemos agora fazer incursões por diversos problemas na área. Uma interessante linha de pesquisa é a possibilidade de utilização de redes neurais para solução de EDP's, já que isto poderá propiciar um método computacionalmente barato de fazer estatística no espaço de fase(*ensemble*), ao invés de lançarmos mão da hipótese ergódica.

## Referências

- [1] Ash, R.B., *Measure, Integration, and Functional Analysis*, Academic Press, (1972).
- [2] Batchelor, G.K. *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge Press, (1953).
- [3] Bec J. & Frisch U., *cond-mat/9906047*.
- [4] Bec J., Frisch U., Khanin K., *chao-dyn/9910001*.
- [5] Burgers, J.M., *The Nonlinear Diffusion Equation*, D. Reidel Publishing Co., (1974).
- [6] Chandrasekhar, S., *Proc. Roy. Soc. London* **200A**, 20, (1949).
- [7] Chandrasekhar, S., *Phys.Rev.* **75**, 896, (1949).
- [8] Chavanis, P.-H. & Sire C., *cond-mat/9911032*.
- [9] Chorin, A.J., *Lectures on Turbulence Theory*, Publish or Perish, (1975).
- [10] Chorin, A.J., *Vorticity and turbulence*, Springer-Verlag, (1991).
- [11] E W., Khanin K, Mazel A., Sinai Ya., *Phys.Rev.Lett.* **78**, 1904-1907, (1997).
- [12] E W., Vanen Eijnden E., *Phys.Rev.Lett.* **83**, 2572-2575, (1999).
- [13] E W., Vanen Eijnden E., *Comm. Pure Appl. Math* em impressão, (2000).
- [14] Eckmann, J.-P., *Rev. Mod. Phys.* **53**, 4, 643-654, (1981).
- [15] Falkovich G., Kolokolov I., Lebedev V., & Migdal A., *chao-dyn/9512006*.

- [16] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, (1968).
- [17] Fournier, J.D. & Frisch, U., *J. Méc. Théor. Appl.***2** no.5, 699-750, (1983).
- [18] Frisch, U., *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, (1995).
- [19] Funaki, T. & Woyczynski, W.A., *Nonlinear Stochastic PDEs*, Springer, (1995).
- [20] Gel'fand & Yaglom, *J. Math. Phys.***vol 1**148-69, (1963).
- [21] Gotoh, T. & Kraichnan, R.H., *Phys. Fluids***10**,2859-2866, (1998).
- [22] Gurbatov S.N., Simdyankin S.I., Aurell, E., Frisch, U. & Tóth G, *physics/9709002*.
- [23] Guckenheimer J., Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Field*, Springer-Verlag, (1986).
- [24] Heisenberg, W., *Zeit. f. Phys.***124**, 628-657, (1948).
- [25] Hinze, J.O., *Turbulence, An Introduction to Its Mechanism and Theory*, McGraw-Hill, (1959).
- [26] Hirsch, M.W., Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, (1974).
- [27] Honerkamp, J., *Stochastic Dynamical Systems*, VCH, (1993).
- [28] Holmes P., Lumley J.L., Berkooz G., *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge Univ. Press, (1998).
- [29] Hopf, E., *Comm Pure Appl. Math.***vol 5**, 157-163, (1950).
- [30] Hopf, E., *Comm Pure Appl. Math.***vol 4**, 41-50, (1950).
- [31] Hopf, E., *Comm Pure Appl. Math.***vol 3**, 201-230, (1950).

- [32] Kardar M., Parisi G., Zhang Y.C., *Phys.Rev.Lett.***56**,889, (1986).
- [33] von Kármán T. & Howarth L., *Proc. Roy.Soc* **164**, pp.192-215, (1938).
- [34] Kolmogorov, A.N., *reprinted in Proc.R.Soc.Lond.A*,**434**,9-13, (1991).
- [35] Kolmogorov, A.N., *reprinted in Proc.R.Soc.Lond.A*,**434**,15-17,(1991).
- [36] Kraichnan, R.H., *Phys. Fluids***7**, 1723-1734, (1964).
- [37] Kraichnan, R.H., *Phys. Fluids***11**, 3738-3742, (1999).
- [38] Lamperti, J.,*Stochastic Process*, Springer-Verlag, (1977).
- [39] Landahl, M.T. & Mollo-Christensen, E., *Turbulence and random process in fluid mechanics*, Cambridge Univ. Press, (1992).
- [40] Landau,L.D. & Lifshitz, E.M., *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, (1959).
- [41] Lewis, R.M. & Kraichnan, R.H., *Comm Pure Appl. Math.***vol 15**, 397-411, (1962).
- [42] Lichtenberg, A.J., Lieberman, M.A., *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, (1991).
- [43] V. L'vov, I. Procaccia, *chao-dyn/9507007*.
- [44] Min I.A., Mezic I., Leonard A., *Phys. Fluids* **8**, 1169, (1996).
- [45] Palis, J. & Takens, F., *Hyperbolicity & sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Univ. Press, (1993).
- [46] Ruelle, D., Takens, F., *Comm. Math. Phys.*,**20**, 167-192, (1970).
- [47] Ruelle, D., *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*, Academic Press, (1989).
- [48] She Z., Aurell E., Frisch U., *Commun. Math. Phys.* **148**, 623-641, (1992).
- [49] Sinai Y.G.,*Commun. Math. Phys.***148**, 601-621, (1992).



- [50] Sirovich, L., *New Perspectives in Turbulence*, Springer-Verlag, (1991).
- [51] Stanisic, M.M., *Mathematical Theory of Turbulence*, Springer-Verlag, (1988).
- [52] Temam, R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, (1988).
- [53] Yaglom e Monim, *Statistical Fluid Mechanics, vol,1 and 2*, MIT press, (1971).
- [54] Wiggind, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, (1990).
- [55] Woyczynski, W.A., *Burgers-KPZ Turbulence*, Springer, (1998).

Condi ãÜpáĩ éîéãéái

